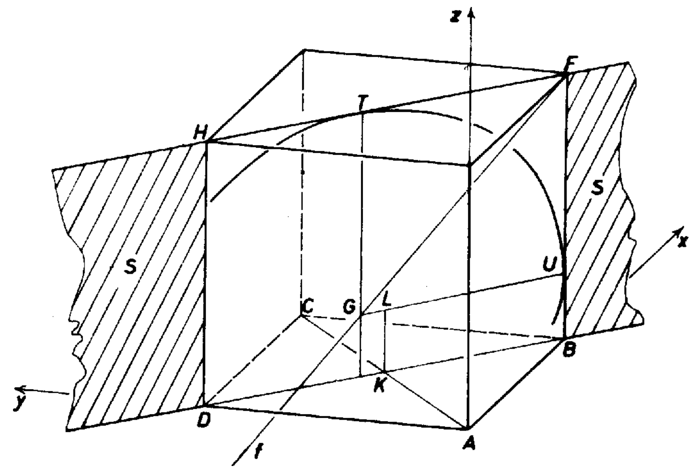
A keresett gömb G középpontja az AC alapátló S felező merőleges síkjában van, ami másképpen a BD átlón átmenő függőleges sík. Ez a sík merőleges a kocka fedőlapjának V síkjára, ezért V és a gömb T érintkezési pontja rajta van a két sík metszésvonalán, ami a fedőlapon a BD-vel párhuzamos és egyirányú FH átló egyenese. Mondhatjuk eszerint, hogy a gömb érinti az FH egyenest. G alatta van V-nek (FH-nak), hiszen a gömbfelület A pontja alatta van V-nek (ld. az ábrát).



Jelölésünk szerint a gömb az FB élegyenest érinti egy U pontban. És mivel FB is az S-ben van, azért az S-ben az FH egyenest T-ben és az FB félegyenest U-ban érintő kör a gömbnek főköre. Ez egyszersmind a gömbnek S-en levő merőleges vetülete, emiatt *belső* pontként tartalmazza A-nak és C-nek S-re való vetületét; ezek egybeesnek egymással és a BD átló K felezőpontjával. Emiatt G az S-nek csak a D-t tartalmazó BFH derékszög-tartományában lehet, ennek f szögfelezőjén.

A gömb r sugarát a $GT = GU = GA$ követelményből határozzuk meg. Legyen még K vetülete GU-ra L, így

$$GA^2 = GL^2 + LK^2 + KA^2, \qquad \text{ahol}$$
$$GL = |GU - LU| = |r - KB| = \left|r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|,$$
$$LK = UB = |FB - FU| = |1 - r|, \qquad KA = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ezekkel

$$r^2 = \left(r - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1-r)^2 + \frac{1}{2},$$
$$r^2 - (2+\sqrt{2})r + 2 = 0,$$

mindkét gyök pozitív, megfelel: $r_1 = 0{,}751$ (ez van az ábrán), $r_2 = 2{,}663$.

Bőősi Imre (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Alább egy olyan utat vázolunk a kérdés megválaszolására, amely a térbeli koordináta-geometria fogalmait, összefüggéseit, eljárásait használja fel. Előrebocsátjuk, hogy az efféle dolgozatokat – pontverseny-kiírásunk szellemében – csak megoldásvázlatoknak tekinthetjük. Látni fogjuk, hogy ha csak némi magyarázatot fűzünk a síkból formálisan leutánzott lépésekhez, mindjárt terjedelmesebb a megoldás a fentinél, itt nem könnyít a koordinátageometria.

Helyezzük el a kockát a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy alaplapja csúcsainak koordinátái

$$A(0,\,0,\,0), \quad B(1,\,0,\,0), \quad C(1,\,1,\,0), \quad D(0,\,1,\,0)$$

legyenek. Legyen másrészt a gömb G középpontja az $(a,\,b,\,c)$ pont, sugara r. Így a gömb egyenlete

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,$$

ti. ezt elégítik ki a gömb minden felületi pontjának $(x,\,y,\,z)$ koordinátái.

Mármost, mivel a gömb átmegy az A és a C ponton, azért teljesül

(1) $$a^2 + b^2 + c^2 = r^2,$$

(2) $$(1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 = r^2.$$

A kocka B-n átmenő oldaléle párhuzamos a z tengellyel, az élegyenes minden pontjának első két koordinátája egyezik B első két koordinátájával, a harmadik tetszőleges: $(1; ,0; z)$. Az élegyenes és a gömb U érintkezési pontjára nézve a GU sugár merőleges az élre, tehát párhuzamos az x, y tengelyek alkotta síkkal, így U harmadik koordinátája c. Az $U(1,\ 0,\ c)$ pont rajta van a gömbön, tehát

(3) $$(1-a)^2+b^2=r^2.$$

A kocka fedőlapsíkjának egyenlete $z=1$. A G középpont alatta van ennek, mert a gömb A és C pontjai alatta vannak a fedőlapnak, így $c<1$. A fedőlapsík és a gömb érintkezési pontját T-vel jelölve T koordinátái: $(a,\ b,\ 1)$, hiszen GT sugár merőleges a fedősíkra, párhuzamos a z tengellyel. Így az előjelre is helyesen

(4) $$\overline{GT}=1-c=r.$$

Mármost az (1) – (4) egyenletrendszerből úgy kapjuk a keresett r-et, hogy kiküszöböljük G koordinátáit. (4)-ből

(5) $$c=1-r.$$

(1)-ből kivonva (2)-t, rendezés után

(6) $$a+b=1$$

(ez fejezi ki, hogy G benne van a B-n és D-n átmenő, a z-tengellyel párhuzamos síkban).

(1)-ből (3)-at kivonva, majd (5)-öt helyettesítve, rendezés után

(7) $$a=r-\frac{r^2}{2},$$

és így (6)-ból

(8) $$b=1-r+\frac{r^2}{2}.$$

Végül (7)-et, (8)-at és (5)-öt (1)-be helyettesítve rendezés után

$$r^4-4r^3+6r^2-8r+4=0.$$

A bal oldalt sikerül két négyzet különbségévé, és így szorzattá alakítani:

$$\left(r^2-2r+2\right)^2-\left(\sqrt{2}r\right)^2=\left[r^2-\left(2+\sqrt{2}\right)r+2\right]\cdot\left[r^2-\left(2-\sqrt{2}\right)r+2\right]=0.$$

Az első tényezőt 0-vá téve az I. megoldás egyenletét és gyökeit kapjuk, a második tényezőből adódó egyenletnek viszont nincs valós gyöke, hiszen diszkriminánsa $(2-\sqrt{2})^2-8<0$. – Ezzel a választ megadtuk.

A sugár ismeretében (7), (8) és (5) alapján a G középpont is megadható; r_1-ből: $a_1=0{,}469$, $b_1=0{,}531$, $c_1=0{,}249$ és r_2-ből $a_2=-0{,}886$, $b_2=1{,}886$, $c_2=-1{,}663$ (tulajdonképpen ezek a koordináták jelentenek segítséget a keresett gömb helyzetének elképzeléséhez).

U koordinátáinak megállapításához ezt is mondhattuk volna: a B oldalél az $x=1$ egyenletű oldallapsík (az ábrán hátul) metszésvonala az $y=0$ egyenletű (jobb) oldallapsíkkal.

Kosztán Erzsébet (Kaposvár, Táncsics M. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján, jelentős kiegészítésekkel