1. feladat. *Részecskék sebességének spektroszkópiai vizsgálata Doppler-eltolódás segítségével.*

Bevezetés: *Az atomok fotonkibocsátása, illetve fotonelnyelése megfordítható folyamat. Erre példa a gerjesztés, majd az azt követő visszatérés az alapállapotba. Így lehetőség nyílik arra, hogy a fotonok elnyelődését a későbbi spontán fotonkibocsátás észlelése révén vizsgáljuk (fluoreszcencia). Modern vizsgálatokban ezt a jelenséget használják fel az atomi részecskék észlelésére és azonosítására, továbbá az atomi részecskenyalábok sebességeloszlásának meghatározására.*

Az 1. ábrán látható idealizált kísérleti elrendezésben egyszeresen töltött ionok v sebességgel mozognak egy lézersugárral szemben. A lézer λ hullámhossza változtatható. A nyugalomban levő részecskék ($v=0$) $\lambda_1 = 600$ nm hullámhosszal gerjeszthetők. A mozgó részecskék gerjesztéséhez ettől eltérő hullámhossz szükséges a Doppler-effektusnak megfelelően.

1988-11-397-1.eps

1. ábra

1988-11-397-2.eps

2. ábra

Az ionok sebességeloszlása egyenletes $v_1 = 0$ és $v_2 = 6000$ m/s értékek között. (A 2. ábra a részecskeszámot ábrázolja a részecskesebesség függvényében.) Oldjuk meg a következő 3 részfeladatot:

1.1. A. feladat: *Milyen hullámhossz-határok között kell a lézert megváltoztatni ahhoz, hogy minden ion gerjesztődjön? Vázoljuk föl az újrakibocsátott fotonok számának eloszlását a lézer hullámhosszának függvényében!*

Megjegyzés: Ebben a részfeladatban a klasszikus Doppler-eltolódás képletével számoljunk!

1.1. B. feladat: *Az előző feladat pontos tárgyalásához a Doppler-eltolódás relativisztikus kifejezése szükséges:*

$$\nu' = \nu\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$

Adjuk meg, hogy a klasszikus formula használata milyen nagyságrendű hibához vezet!

1.2. feladat: *Tegyük fel, hogy az ionok gerjesztésük előtt U nagyságú gyorsító elektrosztatikus potenciálkülönbségen haladnak keresztül. Mi a matematikai kapcsolat a sebességeloszlás szélessége és a gyorsítófeszültség nagysága között? Kiszélesíti vagy elkeskenyíti a feszültség a sebességeloszlást?*

1.3. feladat: *Egy $e/m = 4\cdot 10^6$ C/kg fajlagos töltésű ionnak két állapota van, az ezeknek megfelelő hullámhosszak $\lambda_1 = 600$ nm, $\overline{\lambda}_1 = \lambda_1 + 10^{-3}$ nm. Mutassuk meg, hogy az összes ion gerjesztésekor a lézer két hullámhossz-tartománya átfedésben van, ha nem alkalmazunk gyorsítófeszültséget. Megválasztható-e a gyorsítófeszültség értéke oly módon, hogy ne legyen átfedés a tartományok között? Ha igen, számítsuk ki az ehhez szükséges minimális feszültség értékét!*

Megoldás. 1.1A: A fény hullámhossza és frekvenciája között fennálló $\lambda\cdot\nu = c$ összefüggés, valamint a $\nu' = \nu\left(1 \mp \frac{v}{c}\right)$ klasszikus Doppler-képlet felhasználásával az álló részecskék gerjesztési frekvenciájára

$$\nu_1 = c/\lambda = 3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}/6\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m} = 5\cdot 10^{11}\ \mathrm{Hz},$$

a leggyorsabban mozgó részecskékre pedig

$$\nu' = \nu_2\cdot\left(1+\frac{v_2}{c}\right) = \nu_1 = 5\cdot 10^{11}\ \mathrm{Hz}\ \text{ismeretében}$$

$$\nu_2 = \frac{\nu_1}{1+\frac{v_2}{c}} \approx \nu_1\left(1-\frac{v_2}{c}\right)$$

adódik. Ez annyit jelent, hogy akkor tudjuk valamennyi iont gerjeszteni, ha a lézer frekvenciája

$$\nu_1 - \nu_2 = \nu_1\cdot\frac{v_2}{c} = 5\cdot 10^{11}\ \mathrm{Hz}\cdot\frac{6000}{3\cdot 10^8} = 10^7\ \mathrm{Hz},$$

hullámhossza pedig a

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{c}{\nu_2} - \frac{c}{\nu_1} = \frac{c(\nu_1-\nu_2)}{\nu_1\cdot\nu_2} \approx \frac{3\cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot 10^7\ \frac{1}{\mathrm{s}}}{\left(5\cdot 10^{11}\ \frac{1}{\mathrm{s}}\right)^2} = 12\ \mathrm{nm}$$

intervallumban változtatható. Mivel az ionok sebesség szerinti eloszlása egyenletes, az általuk kibocsátott fény intenzitása (a fotonok száma) is konstans függvény lesz a fentebb kiszámított hullámhossz-tartományban (3. ábra).

1988-11-398-1.eps

3. ábra

1.1B: A pontos relativisztikus képlet szerint

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}.$$

Mivel $\varepsilon = v/c = 2 \cdot 10^{-5} \ll 1$, alkalmazhatjuk az $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n \cdot \varepsilon$ közelítést:

$$\frac{\nu'}{\nu} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \cdot \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Az eredmény első tényezője éppen a klasszikus Doppler-képletnek felel meg, az elkövetett (relatív) hiba tehát $\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} = 2 \cdot 10^{-10}$ nagyságrendű.

1.2: Egy e töltésű, m tömegű részecske v nagyságú sebessége U potenciálkülönbség hatására

$$v' = \sqrt{v^2 + 2eU/m}$$

értékre nő. A kezdeti sebességeloszlás szélső pontjainak megfelelő $v_1 = 0$, illetve $v_2 = 5000$ m/s sebességgel mozgó részecskék sebessége a gyorsítás után

$$v_1^{'} = \sqrt{2 \cdot e \cdot U/m}, \text{ illetve}$$
$$v_2^{'} = \sqrt{v_2^2 + 2 \cdot e \cdot U/m},$$

a sebességeloszlás szélessége tehát

$$v_2^{'} - v_1^{'} = \sqrt{v_2^2 + 2eU/m} - \sqrt{2 \cdot e \cdot U/m}$$

értékre változik. Könnyű belátni, hogy ez kisebb, mint v_2, a sebességeloszlás tehát a gyorsítófeszültség hatására összeszűkül. (Szorozzuk meg a fenti egyenletet a két négyzetgyökös kifejezés összegével, majd fejezzük ki a sebességeloszlás gyorsítás utáni, illetve eredeti szélességének arányát!)

1.3: Ha egy álló iont λ_1 hullámhosszúságú lézerfénnyel lehet gerjeszteni, akkor a különböző sebességgel mozgó ionok halmaza – mint láttuk – a λ_1 és $\lambda_2 = \lambda_1 + 12$ nm hullámhosszak között hangolható lézerrel gerjeszthető. Hasonlóan a λ_1 (nyugalmi) hullámhossznak is egy bizonyos $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ intervallum felel meg (4. ábra). A két gerjesztési spektrum akkor fedi át egymást, ha a Doppler-eltolódásból adódó $\lambda_2 - \lambda_1$ szélesség nagyobb, mint az ion két különböző kvantumállapotának megfelelő $\overline{\lambda}_1 - \lambda_1$ hullámhossz-különbség. A jelen esetben ez valóban fennáll!

1988-11-399-1.eps

4. ábra

Ha az ionokat elektromos erőtérrel gyorsítjuk, sebességük, s a Doppler-effektus miatt az őket gerjeszteni képes lézerfény hullámhossza is megváltozik. Jelöljük ezeket a megváltozott hullámhosszakat $\lambda^{'}$-vel! A két gerjesztési spektrum átfedése akkor szűnik meg, ha $\overline{\lambda}_1^{'} > \lambda_2^{'}$. Mivel

$$\overline{\lambda}_1^{'} = (\lambda_1 + 10^{-3}\ \text{nm})\left(1 + \frac{\sqrt{2eU/m}}{c}\right) \approx \lambda_1 + 10^{-3}\ \text{nm} + \lambda_1\frac{\sqrt{2eU/m}}{c}$$

(hiszen $\lambda_1 \gg 10^{-3}$ nm és $\sqrt{2eU/m} \ll c$), valamint

$$\lambda_2' = \lambda_1\left(1 + \frac{v_2'}{c}\right) = \lambda_1\left(1 + \frac{\sqrt{v_2^2 + 2eU/m}}{c}\right),$$

az átfedés megszűntének feltétele

$$\sqrt{v_2^2 + 2eU/m} - \sqrt{2eU/m} < c \cdot 10^{-3}\ \text{nm}/\lambda_1.$$

Bevezetve az $x = 2eU/m$, $v_2^2 = a$ és $c \cdot 10^{-3}$ nm$/\lambda_1 = b$ jelöléseket, a

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{x} < b$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amelynek megoldása

$$x > \frac{(b^2-a)^2}{4b^2},$$

azaz $U > 150$ V. Ekkora gyorsítófeszültség képes a Doppler-kiszélesedés miatt átfedésbe került spektrumvonalakat szétválasztani.

2. feladat: *Maxwell-korong*

Bevezetés: *Egy* $M = 0,40$ kg *tömegű,* $R = 0,060$ m *sugarú,* $d = 0,010$ m *vastag egyenletes tömegeloszlású hengeres korongot két egyenlő hosszúságú fonálra függesztünk fel. A fonalak egy* r *sugarú, a korong középpontján átmenő tengelyhez csatlakoznak (a fonalak tömege és vastagsága, valamint a tengely tömege elhanyagolható). A fonalakat a tengelyre felcsévélve a korongot (a tömegközéppontját)* $H = 1,0$ m *magasságba emeljük, majd elengedjük, hogy letekeredjen (5. ábra). A korong pályájának legalsó pontját elérve újra emelkedni kezd. Oldjuk meg a következő feladatokat azzal az egyszerűsítő feltevéssel, hogy az* A *pillanatnyi forgástengely mindig a* P *felfüggesztési pont alatt helyezkedik el, vagyis a fonalak mindig függőlegesek maradnak (6. ábra).*

1988-11-400-1.eps

5. ábra

1988-11-400-2.eps

6. ábra

Oldjuk meg az alábbi 5 *részfeladatot!*

2.1. feladat: *Mekkora* ω *szögsebességgel rendelkezik a forgó korong az* S *tömegközéppont* s *nagyságú süllyedése után?*

2.2. feladat: *Mekkora a korong* E_{trans} *haladási (transzlációs) mozgási energiája* $s = 0,50$ m *süllyedés után? Határozzuk meg számszerűen, hogy ez az energia hogyan aránylik a feladatban szerepet játszó többi energiákhoz ebben a pillanatban, ha a tengely sugara* $r = 0,0030$ m.

2.3. feladat: *Határozzuk meg az egyes fonalakban ható* T_1 *feszítőerőt a korong leereszkedése közben!*

2.4. feladat: *Számítsuk ki a korong* ω' *szögsebességét a* Φ *elfordulási szög függvényében a 7. ábrán látható átfordulási fázisban! Ábrázoljuk (legalább kvalitatíven) a korong tömegközéppontjának elmozdulás- és sebességösszetevőit (alkalmasan választott Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben) a* Φ *elfordulási szög függvényében!*

1988-11-401-1.eps

7. ábra

2.5. feladat: *A fonál legfeljebb* $T_m = 10$ N *feszítőerőt bír ki. Mekkora lehet maximálisan a fonalak* s_m *lecsavarodási hossza, hogy ne következzék be szakadás az átfordulási fázisban?*

Megoldás: 2.1: Az energiamegmaradás tétele szerint

$$MgH = Mg(H-s) + \frac{1}{2}\Theta\omega^2 + \frac{1}{2}Mr^2\omega^2,$$

ahol Θ a korong tehetetlenségi nyomatéka. Innen

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mgs}{\Theta + Mr^2}}.$$

2.2: A test helyzeti energiájának változása az induláshoz képest

$$E_h = Mgs \approx 2 \text{ J}.$$

A forgási energiája

$$E_f = \frac{1}{2}\Theta \cdot \omega^2 = \frac{1}{4} M \cdot R^2 \cdot \omega^2,$$

a haladó mozgás energiája pedig

$$E_t = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} M \cdot r^2 \cdot \omega^2,$$

ezek aránya tehát

$$\frac{E_t}{E_f} = 2\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{200}.$$

Mivel $E_t + E_f = E_h$, $E_t = E_h/201 \approx 10^{-2}$ J és $\dfrac{E_f}{E_h} = \dfrac{200}{201}$.

2.3: A korong tömegközéppontjának gyorsulását a-val, a szöggyorsulást β-val, a fonalakban ébredő teljes erőt pedig T-vel jelölve a mozgásegyenletek:

$$Mg - T = Ma,$$
$$Tr = \Theta\beta,$$
$$a = \beta \cdot r.$$

Innen $\Theta = MR^2/2$ felhasználásával

$$T = \frac{Mg}{1 + 2(r/R)^2}.$$

Az egyes fonalakat $T/2 = 1{,}95$ N erő feszíti.

2.4: Mindenekelőtt meg kell jegyezzük, hogy a feladat szövegében szereplő egyszerűsítő feltevés a korong átfordulása alatt nem teljesülhet. Ha ugyanis a felfüggesztő fonalak mindvégig függőlegesek maradnának, akkor a korongra nem hatna vízszintes irányú erő, s Newton II. törvénye értelmében a tömegközéppontja nem gyorsulhatna vízszintes irányban. Márpedig az egyszerűsítő feltétel szükségszerűen együttjár egy ilyen gyorsulás feltételezésével! A tényleges mozgás során a korong tömegközéppontja majdnem pontosan függőlegesen mozog. Az átfordulás alatt a fonál „átcsapódik” a tengely túlsó oldalára, s mivel a függőlegestől csak nagyon kicsit tér el, számottevő vízszintes erőt nem képes kifejteni. (Sajnálatos módon a diákolimpián a Nemzetközi Zsűri ennek az átcsapódási folyamatnak a részletes végiggondolását túlságosan nehéznek ítélte, és ehelyett a hibás, a Newton-egyenleteknek ellentmondó feltevés alapján történő számítást várta el a versenyzőktől.)

A fonál P felfüggesztési pontját választva a koordinátarendszer kezdőpontjának és az x-tengelyt vízszintesen, az y-tengelyt pedig függőlegesen lefelé irányítva a tömegközéppont koordinátái az átfordulási fázisban:

$$s_x = -r\cos\Phi,$$
$$s_y = H + r\sin\Phi.$$

Az energia-tétel szerint a forgás szögsebessége

$$\omega = \sqrt{\frac{2Mg(H + r \cdot \sin\Phi)}{\Theta + Mr^2}},$$

de mivel $H \gg r\sin\Phi$ és $\Theta \gg M \cdot r^2$, az átfordulás alatt a szögsebesség jó közelítéssel

$$\omega(\Phi) \approx \sqrt{\frac{2MgH}{\Theta}} = \text{ állandó}$$

értéknek vehető. Így $\Phi = \omega \cdot t$, azaz

$$S_x = -r\cos\omega t,$$
$$S_y = H + r\sin\omega t,$$

melyek deriválásából, vagy az egyenletes körmozgás hasonló képleteire való hivatkozással a sebességeket is felírhatjuk:

$$v_x = r \cdot \omega\sin\omega t = r \cdot \omega \cdot \sin\Phi,$$
$$v_y = r \cdot \omega \cdot \cos\omega t = r \cdot \omega \cdot \cos\Phi.$$

(Ha ismételt deriválással a tömegközéppont gyorsulását is kiszámítanánk, rögtön nyilvánvaló lenne, hogy ellentmondásba kerülünk a dinamika alaptörvényével. A valóságban csak a függőleges elmozdulásra, illetve sebességkomponensre vonatkozó összefüggések fogadhatók el (nagyon jó közelítéssel), az s_x-re és v_x-re felírt egyenletek hibásak!)

2.5: Az átfordulás alatt a korong „ránt” egyet a fonálon. Az erőlökés nagyságát durván az impulzusváltozás nagyságából és az átfordulás idejéből becsülhetjük meg:

$$Mg - T_{\text{átlag}} = \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = -\frac{2 \cdot M \cdot r \cdot \omega}{\pi/\omega},$$

ahonnan

$$T_{\text{átlag}} = M \cdot g + \frac{2}{\pi} \cdot Mr\omega^2.$$

Pontosabb számolással meghatározhatjuk a fonalakat feszítő legnagyobb erőt is. A tömegközéppont gyorsulása a pálya legalsó pontján maximális:

$$a_{\max} = r \cdot \omega^2,$$

ahonnan az egyes fonalakat feszítő legnagyobb erő:

$$T_{\max} = \frac{1}{2}Mg + \frac{1}{2}M \cdot r \cdot \omega^2.$$

Ez akkor nem haladja meg a megengedett 10 N-os értéket, ha

$$s_m \leqq \left(\frac{2 \cdot T_{\max}}{Mg} - 1\right) \cdot \frac{R^2}{4r} = 0,72 \text{ m}.$$

3. feladat: *Rekombinációs folyamatok gázkisülésben.*

Bevezetés. *Elegendően magas hőmérsékletű gázkisülési cső különböző fajtájú ionokat tartalmaz. Vannak közöttük olyan ismeretlen Z rendszámú atomok, amelyek egy kivételével valamennyi elektronjukat elvesztették. Ezeket a továbbiakban $A^{(Z-1)+}$ módon jelöljük.*

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm},\\
&e \ (\textit{elektrontöltés}) = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As},\\
&q^2 = e^2(4\pi\varepsilon_0) = 2,307 \cdot 10^{-28} \text{ Jm},\\
&\hbar \ (\textit{Planck-állandó}/2\pi) = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Js},\\
&m_0 \ (\textit{elektrontömeg}) = 9,108 \cdot 10^{-31} \text{ kg},\\
&r_{\text{B}} \ (\textit{Bohr-sugár}) = \hbar/m_{\text{e}}q^2 = 5,292 \cdot 10^{-11} \text{ m},\\
&E_{\text{R}} \ (\textit{Rydberg-energia}) = q^2/2r_{\text{B}} = 2,180 \cdot 10^{-18} \text{ J},\\
&m_{\text{p}}c^2 (\textit{proton nyugalmi energiája}) = 1,503 \cdot 10^{-10} \text{ J}.
\end{aligned}$$

Oldjuk meg a következő 5 részfeladatot!

3.1. feladat: *Tételezzük fel, hogy az $A^{(Z-1)+}$ ion egyetlen megmaradt elektronja alapállapotban van. Ebben az állapotban az elektron magtól mért távolságnégyzetének átlagát r_0^2-tel jelöljük és a $(\Delta x)^2$, $(\Delta y)^2$, $(\Delta z)^2$ helybizonytalanságok összegeként értelmezzük. Hasonló módon az elektron impulzusnégyzetének átlagát p_0^2-tel jelöljük és a $(\Delta p_x)^2$, $(\Delta p_y)^2$, $(\Delta p_z)^2$ impulzusbizonytalanságok összegeként definiáljuk.*
Milyen egyenlőtlenséget elégít ki a $(p_0^2) \cdot (r_0^2)$ szorzat?

3.2. feladat: *Egy $A^{(Z-1)+}$ ion befoghat egy elektront, majd kibocsát egy fotont. Írjuk fel azokat az egyenleteket, amelyekből a foton frekvenciája meghatározható, de ne oldjuk meg ezeket!*

3.3. feladat: *Határozzuk meg az $A^{(Z-1)+}$ ion energiáját annak a ténynek a felhasználásával, hogy az alapállapotbeli energia minimális. A számolás során használjuk a következő közelítéseket:*
a) *A potenciális energia képletében $(1/r)$ átlagértékét helyettesítsük $(1/r_0)$-lal, ahol r_0 a 3.1 pontban szereplő mennyiség.*
b) *A mozgási energia kifejezésében az impulzus négyzetének átlagát helyettesítsük a 3.1. feladatbeli p_0^2-tel, majd használjuk fel a 3.1. probléma megoldásának $(p_0^2)(r_0^2) = \hbar^2$ alakú egyszerűsített változatát!*

3.4. feladat: *A fentihez hasonló módon határozzuk meg az $A^{(Z-2)+}$ ion energiáját. Ez az ion további elektron felvételével alakul ki, és feltételezhetjük róla, hogy alapállapotban van. Jelöljük a két elektronnak a magtól való átlagos távolságát (a 3.3. részfeladatban szereplő r_0 megfelelőjét) r_1-gyel és r_2-vel. Az egymástól mért átlagos távolságukat egyszerűen közelítsük $(r_1 + r_2)$-vel! Tegyük fel továbbá, hogy mindkét elektron impulzusnégyzetének átlagértéke kielégíti a határozatlansági relációt $(p_1^2)(r_1^2) = \hbar^2$ és $(p_2^2)(r_2^2) = \hbar^2$ alakban.*
Útmutatás: Felhasználható az a tény, hogy az alapállapotban $r_1 = r_2$.

3.5. feladat: *Szorítkozzunk a továbbiakban arra a speciális folyamatra, amelyben egy nyugalomban levő és alapállapotú $A^{(Z-1)+}$ ion befog egy szintén nyugalomban levő elektront.*

Határozzuk meg azt a Z rendszámot, amelynél az elektronbefogást (rekombinációt) követő foton körfrekvenciája $\omega_0 = 2,507 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1}$. Melyik elem ionjáról van szó?

Megoldás. 3.1: Alapállapotban az elektron gömbszimmetrikusan helyezkedik el az atommag körül, így

$$\Delta x^2 = \Delta y^2 = \Delta z^2 = \frac{1}{3} r_0^2,$$

hasonlóan

$$\Delta p_x^2 = \Delta p_y^2 = \Delta p_z^2 = \frac{1}{3} p_0^2.$$

A Heisenberg-féle határozatlansági összefüggés szerint

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \geqq \frac{\hbar}{2},$$

ahonnan

$$p_0^2 \cdot r_0^2 \geqq \frac{9\hbar^2}{4}.$$

3.2: Az elektronbefogás–fotonkibocsátási folyamatban érvényes az energia- és az impulzusmegmaradás törvénye:

$$E_{\mathrm{mozg.}}(\mathrm{elektron}) + E_{\mathrm{mozg.}}(A^{(Z-1)+}) + E_{\mathrm{kötési}}(A^{(Z-1)+}) =$$
$$= E_{\mathrm{mozg.}}(A^{(Z-2)+}) + E_{\mathrm{kötési}}(A^{(Z-2)+}) + E(\mathrm{foton}),$$

illetve

$$\mathbf{P}(\mathrm{elektron}) + \mathbf{P}(A^{(Z-1)+}) = \mathbf{P}(A^{(Z-2)+}) + \mathbf{P}(\mathrm{foton}).$$

Ugyanez kicsit részletesebben

$$m_e \cdot v_e^2/2 + (M + m_e)V^2/2 + E_{\mathrm{kötési}}(A^{(Z-1)+}) =$$
$$= (M + 2m_e)W^2/2 + E_{\mathrm{kötési}}(A^{(Z-2)+}) + hf,$$

valamint

$$m_e \mathbf{v}_e + (M + m_e)\mathbf{V} = (M + 2m_e)\mathbf{W} + h \cdot \mathbf{n}/\lambda.$$

ahol M az ion atommagjának tömegét, m_e az elektron tömegét, $\mathbf{v}_e$ az elektron, $\mathbf{V}$ és $\mathbf{W}$ az ion (kezdeti, ill. az elektronbefogás utáni) sebességét, λ a foton hullámhosszát, f a frekvenciáját, $\mathbf{n}$ pedig a terjedési irányába mutató egységvektort jelöli.

3.3: Az ion $E_{\mathrm{kötési}}(A^{(Z-1)+})$ energiáját az

$$E = \left\langle \frac{p^2}{2m_e} \right\rangle - Z \cdot q^2 \cdot \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

kifejezés adja meg, ahol a $\langle\rangle$ jel az átlagértékre utal. A javasolt közelítést alkalmazva

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \frac{1}{r_0^2} - Zq^2 \cdot \frac{1}{r_0}.$$

Az alapállapot energiáját a fenti kifejezés minimuma adja meg; ezt vagy deriválással, vagy pedig teljes négyzetté alakítással számíthatjuk ki. Az eredmény:

$$r_0 = r_B/Z,$$

a megfelelő energia pedig

$$E_{\mathrm{kötési}}(A^{(Z-1)+}) = -E_{\mathrm{R}} \cdot Z^2.$$

3.4 A két elektront tartalmazó rendszer energiája

$$E = \left\langle \frac{p_1^2}{2m_e} \right\rangle + \left\langle \frac{p_2^2}{2m_e} \right\rangle - Zq^2 \left\langle \frac{1}{r_1} \right\rangle - Zq^2 \left\langle \frac{1}{r_2} \right\rangle + q^2 \left\langle \frac{1}{r_{1,2}} \right\rangle.$$

Fejezzük ki az impulzusokat a határozatlansági összefüggés segítségével az átlagos távolságokkal, alkalmazzuk a javasolt közelítést, majd keressük meg E minimumát!

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e r_1^2} + \frac{\hbar^2}{2m_e r_2^2} - \frac{Zq^2}{r_1} - \frac{Zq^2}{r_2} + \frac{q^2}{r_1 + r_2},$$

majd $r_1 = r_2 = r$ helyettesítéssel

$$E(r) = \frac{\hbar^2}{m_e r^2} - \left(Z - \frac{1}{4}\right)\frac{2q^2}{r}.$$

A minimum $dE/dr = 0$ feltételéből

$$E_{\text{kötési}}(A^{(Z-2)+}) = -2E_R \cdot \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2$$

adódik.

3.5: A korábbi eredmények felhasználásával az energia- és az impulzusmegmaradást kifejező egyenletek:

$$-E_R Z^2 = (M + 2m_e)W^2/2 - 2E_R\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 + \hbar\omega_0,$$

illetve

$$0 = (M + 2m_e)W + \hbar\omega_0/c.$$

Ez utóbbiból kiszámíthatjuk a visszalökődött ion sebességét:

$$W = \frac{\hbar\omega_0}{(M + 2m_e)c},$$

amelyet az energiaképletbe helyettesítve

$$E_R\left[2\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 - Z^2\right] = \hbar\omega_0\left[1 + \frac{\hbar\omega_0}{2(M + 2m_e)c^2}\right]$$

adódik. Ez a képlet a Bohr-féle

$$\Delta E_{\text{kötési}} = h \cdot f \ (= \hbar\omega)$$

frekvencia-feltétel módosított alakja; a jobb oldal második tagja a visszalökődésből származó mozgási energiát veszi figyelembe. Mivel a számszerű adatok közül hiányzik az ion atommagjának M tömege, a numerikus kiértékelés csak úgy folytatható, ha valamilyen becslést alkalmazunk. Nyilván $M \geqq Z \cdot m_p$, és már egyetlen proton $m_p c^2$ „nyugalmi" energiája is 7 nagyságrenddel (!) nagyobb, mint a foton energiája, a viszszalökődési energia teljes mértékben elhanyagolható. (Megjegyezzük, hogy az egész eddigi számításunk – az alkalmazott közelítések miatt – legfeljebb $20 - 30\%$ pontosságig vehető csak komolyan.)

A feladatban szereplő frekvenciával számolva az atommag Z rendszámára a

$$Z^2 - Z - 12 = 0$$

másodfokú egyenlet adódik, amelynek (pozitív) gyöke: $Z = 4$. A szóban forgó $A^{(Z-2)+}$ ion tehát feltehetően a berillium Be^{++}.

Gnädig Péter