I. megoldás. A háromszögben szokásos jelölésekkel a föltevések és az állítás így írhatók:

$$AP = \frac{c}{4}, \qquad PB = \frac{3c}{4}, \qquad BPC\sphericalangle = \frac{\beta}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad b = a + \frac{c}{2}.$$

Mivel $PCB\sphericalangle = 180° - \frac{3\beta}{2} > 0°$, azért $\beta < 120°$, azaz B-nél tompaszög is előfordulhat. Legyen B tükörképe a CC_1, magasságvonalára B', ekkor a $B'PC$ háromszög mindenképpen egyenlő szárú: $B'P = B'C = CB = a$. Ez $\beta = 90°$ esetén nyilvánvaló, különben pedig a külső szög tételéből következik; a $B'PC$ háromszög B'-nél levő külső szöge $\beta < 90°$ és $\beta > 90°$ esetén egyaránt β, így mindig $B'CP\sphericalangle = B'PC\sphericalangle = \beta/2$. Ezekből a CBB' egyenlő szárú háromszög alapja

$$BB' = \frac{3c}{4} - a, \qquad \text{illetve} \qquad a - \frac{3c}{4}, \qquad BC_1 = \left|\frac{3c}{8} - \frac{a}{2}\right|,$$

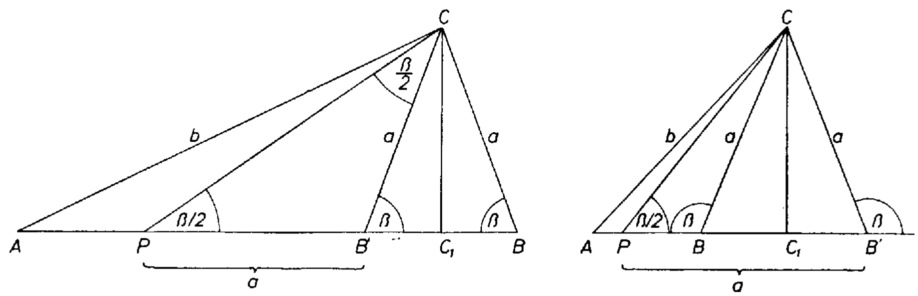
és mindkét esetben

$$AC_1 = c - \frac{BB'}{2} = \frac{5c}{8} + \frac{a}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad AC_1 = c + \frac{BB'}{2} = \frac{5c}{8} + \frac{a}{2}.$$

Most már az ACC_1 és BCC_1 derékszögű háromszögekből

$$b^2 = AC_1^2 + CC_1^2 = \left(\frac{5c+4a}{8}\right)^2 + (CB^2 - BC_1^2) = a^2 + \left(\frac{5c+4a}{8}\right)^2 - \left(\frac{3c-4a}{8}\right)^2 = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2,$$

és ez bizonyítja az állítást.



II. megoldás. A PBC háromszög C-nél levő szöge $180° - \frac{3\beta}{2}$, ezért a sinustétel és ismert azonosságok alapján

$$\frac{PB}{BC} = \frac{3c}{4a} = \frac{\sin\left(180° - \frac{3\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{3\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = 3 - 4\sin^2\frac{\beta}{2},$$

$$\cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 + \frac{3c}{8a} - \frac{3}{2} = \frac{3c-4a}{8a}.$$

Így pedig az ABC háromszögben a cosinustétel alapján ismét

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta = \left(a + \frac{c}{2}\right)^2.$$

Megjegyzés. Bizonyítható az állítás Stewart tétele alapján is, azt is felhasználva, hogy a CBP háromszöget a BD szögfelező úgy vágja ketté, hogy BDP rész egyenlő szárú háromszög, CDB rész pedig a felosztás előttihez hasonló háromszög.