B. J. Kogan fenti cikke a geometria és a fizika bizonyos területei közt fennálló érdekes kapcsolatra hívja fel a figyelmet. Az általa felsorolt példák a háromszög bizonyos nevezetes vonalainak egy ponton való áthaladását „bizonyítják" a fizika módszereivel. Ez a gondolatmenet azonban továbbvihető s egészen más jellegű geometriai feladatok is megoldhatók a mechanika törvényeinek alkalmazásával.

Ismeretes, hogy egy tömegpont csak olyan helyen lehet stabil egyensúlyi helyzetben, ahol a rá ható (konzervatívnak feltételezett) erőkhöz tartozó helyzeti energia minimális. Ha ugyanis lenne a vizsgált pontok közelében egy olyan hely, ahol még kisebb a test helyzeti energiája, akkor oda *„szívesen" menne*, s a két energia különbségéből még mozgási energiára – vagy a súrlódás legyőzésére – is futná. Természetesen a minimumfeltétel csak a test által ténylegesen elérhető helyek összehasonlítását engedi meg. Ha kényszerek korlátozzák a test mozgását (például egy lejtős felületen mozoghat csak, vagy egy fonál nyújthatatlansága miatt egy adott ponttól mért távolsága meghatározott értékű kell legyen), akkor csak a kényszerek által meghatározott helyek közül választhatja ki a legkisebb helyzeti energiájú állapotot.

Másrészt viszont az egyensúlyi helyzetben a testre ható erők eredője, vagyis a vektori összege nulla kell legyen. Az egyensúly feltételének kétféle megfogalmazása lehetőséget kínál arra, hogy bizonyos geometriai szélsőértékfeladatokat más, néha egyszerűbb problémára vezessünk vissza. (Természetesen a fordított út is elképzelhető; a fizika nagyon sok törvénye megfogalmazható minimumfeladatként is.)

Itt most egyetlen példát mutatunk be az ilyen típusú feladatok széles választékából. Határozzuk meg egy általános háromszög azon belső pontját, amelyre a háromszög csúcspontjaitól mért távolságok összege minimális! Diszkutáljuk a megoldhatóság feltételét is.

1988-01-038-1.eps

1. ábra

Olyan fizikai helyzetet kell teremtenünk, amelyben valamilyen rendszer teljes helyzeti energiája arányos lesz azzal a mennyiséggel, amelynek minimumát keressük. Jelen esetben ezt úgy érhetjük el, hogy a háromszög csúcsaiba csigákat helyezünk, s ezeken keresztül három azonos tömegű testet lógatunk le. A fonalak egyik végét az ábrán látható módon összekötjük, a háromszöget (pontosabban a háromszöget realizáló testet) pedig vízszintes helyzetben rögzítjük. Amennyiben az egyes fonalak hossza l_1, l_2 és l_3, a P pontnak a csúcsoktól mért távolsága pedig d_1, d_2 és d_3, úgy a rendszer teljes helyzeti energiája (a háromszög síkjához képest)

$$\begin{aligned} E_{\text{helyezeti}} &= -mg(l_1-d_1)-mg(l_2-d_2)-mg(l_3-d_3)= \\ &= \text{állandó}+\text{állandó}\cdot(d_1+d_2+d_3). \end{aligned}$$

A rendszer energiája akkor a legkisebb, ha a $d_1+d_2+d_3$ minimális. Másrészt a fonalakat egyenlő nagyságú erők feszítik, s ezen erők csak úgy adhatnak nulla eredőt a P pontban, ha a fonalak 120°-os szöget zárnak be egymással. Ennek felismerése után a P pont tényleges helyzetének meghatározása nem nehéz; egy-egy 120°-os látószögű körív metszéspontja kijelöli a keresett pontot (2. ábra). Látható, hogy hegyesszögű háromszög esetén a feladat mindig egyértelműen megoldható, tompaszögű háromszögnél viszont elképzelhető, hogy a 120°-os látószögnek megfelelő körívek a háromszögön kívül metszik egymást. Ez akkor fordulhat elő, ha a háromszög egyik szöge 120°-nál nagyobb. Ilyenkor a minimumfeltételnek a háromszög tompaszögű csúcsa tesz eleget.

1988-01-039-1.eps

2. ábra

A feladat könnyen általánosítható. Amennyiben olyan pontot keresünk, melyre a csúcspontoktól mért távolságok súlyozott összege minimális, úgy nyilván különböző tömegű súlyokat kell a fonalak végeire akasztanunk s ezek egyensúlyának feltételét vizsgálnunk. Elemi geometriai úton meglehetősen bonyolult lenne a probléma megoldása.