Ebben a cikkben néhány, a háromszögek geometriájához tartozó állítást igazolunk, mégpedig oly módon, hogy a bizonyításokban a *statika* alapfogalmaira, axiómáira, szabályaira támaszkodunk. Feltételezzük, hogy az Olvasó előtt ismeretes az erővektor fogalma és tulajdonságai; a merev testre ható erők összegzésének módja; egy test egyensúlyának feltétele; ... Ennek ellenére – a későbbiekben játszott szerepére tekintettel – kiemeljük, hogy

ha egy merev testre három, nem párhuzamos, egy síkban fekvő erő hat, és ezek egymással egyensúlyt tartanak, akkor hatásvonalaik egy pontban metszik egymást.

Bizonyításainkban lényegében ezt a megállapítást alkalmazzuk.

1. A háromszög szögfelezőire vonatkozó tétel

1988-01-033-1.eps

1. ábra

Tekintsük az *1. ábra* szerint felvett, az ABC háromszög oldalegyenesei mentén ható, egyenlő nagyságú F_1, F_2, $\ldots$, F_6 erőket! Mivel ezek az erők nyilvánvalóan egyensúlyban vannak, eredőik, az ábrán látható E_A, E_B, E_C erők szintén egyensúlyban lesznek. Ezek az eredők viszont – a háromszög csúcsainál keletkező rombuszok alapján – a háromszög szögeinek belső szögfelezőire illeszkednek; következésképpen a háromszög belső szögfelezői egy pontban metszik egymást. Hasonló gondolatmenet alapján az Olvasó maga is könnyen beláthatja, hogy a háromszög két külső és egy belső szögfelezője egy ponton halad át.

2. A háromszög magasságaira vonatkozó tétel

1988-01-034-1.eps

2. ábra

A *2. ábrán* látható ABC háromszög oldalain úgy helyeztük el az F_1, F_2, $\ldots$, F_6 erőket, hogy egy tetszőleges F erő választása után az

$$\left.\begin{aligned} F_1 = F_2 &= F\cos A\\ F_3 = F_4 &= F\cos B\\ \text{és}\qquad F_5 = F_6 &= F\cos C \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

összefüggések teljesüljenek, vagyis erőrendszerünk egyensúlyban legyen, azaz az erők páronként alkotott eredői egy ponton haladjanak át. Határozzuk meg ezen eredők irányát! Adjuk össze például a B csúcsban támadó F_1 és F_6 erőket! E célból bontsuk mindkettőt két összetevőre úgy, hogy ezek egyike az AC oldallal párhuzamosan, a másik rá merőlegesen helyezkedjen el!

1988-01-034-2.eps

3. ábra

A *3. ábra* alapján látható, hogy F_1 AC-vel párhuzamos összetevője $F_1\cos C$-vel, F_6 azonos állású összetevője pedig $F_6\cos A$-val egyenlő. De az (1) összefüggésből következik, hogy

$$\frac{F_1}{F_6}=\frac{\cos A}{\cos C}\,,\qquad \text{(derékszögű háromszögnél ez nem igaz)}$$

ahonnan $F_1\cos C=F_6\cos A$. Így F_1 és F_6 AC-vel párhuzamos összetevői azonos nagyságúak és ellentétes irányúak, ezért összegük 0. Ebből az következik, hogy F_1 és F_6 eredője az AC oldalra merőleges; ilyen módon az E_B erő hatásvonala az AC oldalhoz tartozó magassággal egyezik meg. Hasonló módon kaphatjuk, hogy az E_A és E_C erők hatásvonala a háromszög másik két magasságvonalával esik egybe; következésképpen a háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.

3. A háromszög súlyvonalaira vonatkozó tétel

1988-01-035-1.eps

4. ábra

Tekintsük a *4. ábrán* látható módon elhelyezett F_1, F_2, $\ldots$, F_6 erőket! Legyen mindegyik erővektor hossza a megfelelő háromszögoldal fele! Ekkor az F_1 és F_6 erők eredője a BC, F_2 és F_3 erők eredője az AC, F_4 és F_5 erőké pedig az AB oldalhoz tartozó súlyvonal mentén hat (lásd a megfelelő erőparalelogrammákat). Mivel pedig F_1, F_2, $\ldots$, F_6 egyensúlyban vannak, a háromszög súlyvonalai egy pontban metszik egymást.

4. A belső szögfelezőkre vonatkozó tétel általánosítása

Az ABC háromszögben vegyük fel az A szöget α_1 és α_2 részekre osztó a, a B szöget β_1 és β_2 részekre osztó b és a C szöget γ_1 és γ_2 részekre osztó c egyenest (*5. ábra*) !

1988-01-035-2.eps

5. ábra

Helyezzünk el az A csúcsnál egy tetszőleges nagyságú, a-val azonos hatásvonalú E_1 erőt, majd bontsuk fel a háromszög oldalai mentén F_1 és G_1 összetevőkre! Járjunk el hasonló módon a háromszög B és C csúcsánál is, ezzel együtt azonban E_2-t válasszuk úgy, hogy F_2 egyenlő legyen G_1-gyel, E_3-at pedig úgy, hogy F_3 nagysága egyenlő legyen G_2-vel! Így az E_1, E_2, E_3 erőrendszerrel ekvivalens F_1, G_3 rendszerhez jutunk.

Tekintsük a $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$ és $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$ arányokat!

Az A, B és C csúcsoknál keletkezett paralelogrammák alapján

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{G_1}{F_1},\quad \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{G_2}{F_2}\quad \text{valamint}\quad \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{G_3}{F_3},$$

és ezért

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{G_1}{F_1}\cdot\frac{G_2}{F_2}\cdot\frac{G_3}{F_3}=\frac{G_3}{F_1}\,. \tag{2}$$

A továbbiakban két eset lehetséges:

I.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1, \tag{3}$$

ekkor $F_1=G_3$, azaz az F_1 és G_3 erők, s így a velük ekvivalens E_1, E_2, E_3 erők is egyensúlyban vannak, és ebből következik, hogy az a, b és c egyenesek egy pontban metszik egymást.

II.

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\neq 1,$$

ekkor (2) szerint $F_1\neq G_3$. Belátjuk, hogy ebben az esetben az a, b és c egyenesek nem metszhetik egy pontban egymást. Tegyük fel ennek ellenkezőjét!

Ebben az esetben az E_1, E_2 és E_3 erőket hatásvonaluk közös O pontjába helyezve megkereshetjük eredőjüket (E), amely ekvivalens kell legyen F_1 és G_3 eredőjével. Ez azonban nem lehetséges, mert az F_1 és a G_3 erők eredője az AC egyenesen fekszik, E hatásvonala pedig biztosan különbözik ettől, hiszen O nem eleme ennek az egyenesnek. A kapott ellentmondás azt mutatja, hogy az a, b és c egyenesek nem egy ponton haladnak át.

Ezek szerint az 5. ábrán látható egyenesek csak akkor metszik egymást egy pontban, ha fennáll a (3) összefüggés. Másképpen szólva: annak, hogy a, b és c egyenesek egy pontban messék egymást, szükséges és elégséges feltétele, hogy (3) teljesüljön. Ezt az állítást a belső szögfelezőkre vonatkozó tétel általánosításának tekinthetjük, hiszen ott nem csak (3) bal oldala, hanem a $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$, $\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$, $\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$ arányok bármelyike is 1-gyel egyenlő.

Eredményünkből levezethető a háromszög magasságaira mondott tétel is; javasoljuk, hogy ezt az *Olvasó* végezze el önállóan.

5. A súlyvonalakra vonatkozó tétel általánosítása, Ceva tétele

1988-01-036-1.eps

6. ábra

Tekintsük az ABC háromszöget! Legyen F_1 és F_2 erők hatásvonala AB és AC, eredőjük hatásvonala pedig AA_1 (*6. ábra*)! Vegyük fel a BC oldallal párhuzamos, A-n áthaladó DE egyenest, és bontsuk fel az F_1 erőt F_1', F_1''; az F_2 erőt F_2' és F_2'' összetevőkre! Az ábra alapján

$$\frac{F_1'}{F_1}=\frac{A_1C}{AC}\quad \text{és}\quad \frac{F_2'}{F_2}=\frac{BA_1}{AB},$$

ahonnan

$$F_1'=F_1\cdot\frac{A_1C}{AC}\quad \text{és}\quad F_2'=F_2\cdot\frac{BA_1}{AB}\,.$$

Mivel F_1 és F_2 erők eredőjének hatásvonala megegyezik AA_1-gyel, $F_1'=F_2'$. Következésképpen

$$F_1\cdot\frac{CA_1}{CA}=F_2\cdot\frac{BA_1}{AB}\quad \text{vagy}\quad \frac{F_1}{F_2}=\frac{CA}{AB}\cdot\frac{BA_1}{CA_1}\,. \tag{4}$$

1988-01-037-1.eps

7. ábra

Vegyük most az ABC háromszög oldalain az A_1, B_1, C_1 pontokat, és kössük össze őket a szemközti csúcsokkal (*7. ábra*)! Helyezzük el az A, B és C pontokban támadó E_1, E_2 és E_3 erőket úgy, hogy hatásvonalaik az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek legyenek, majd bontsuk fel őket olyan összetevőkre, melyek a háromszög oldalaira esnek! Mindemellett E_1-et válasszuk tetszőlegesen, az E_2 és E_3 erőket pedig úgy, hogy

$$F_2 = G_1 \quad \text{és} \quad F_3 = G_2 \tag{5}$$

teljesüljön! Továbbá (4) szerint

$$\frac{F_1}{G_1} = \frac{CA}{AB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C}, \quad \frac{F_2}{G_2} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \quad \text{és} \quad \frac{F_3}{G_3} = \frac{BC}{CA} \cdot \frac{AC_1}{C_1B}.$$

Ezen egyenlőségek szorzatát képezve kapjuk, hogy

$$\frac{F_1}{G_1} \cdot \frac{F_2}{G_2} \cdot \frac{F_3}{G_3} = \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B},$$

majd a tényezők sorrendjének változtatásával és (5) figyelembe vételével kapjuk, hogy:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{F_1}{G_3}. \tag{6}$$

Vizsgáljuk az alábbi két esetet:

I.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \tag{7}$$

Ekkor $F_1 = G_3$, azaz ezek az erők egyensúlyban vannak; következésképpen E_1, E_2 és E_3 is, tehát az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást.

II.

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \neq 1.$$

Ekkor (6) szerint F_1 és G_3 különbözőek. Az előző tétel bizonyításakor említett gondolatmenet alapján arra a következtetésre juthatunk, hogy az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek nem haladhatnak át egy ponton.

Így annak, hogy az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek egy pontban messék egymást, szükséges és elégséges feltétele, hogy fennálljon a (7) egyenlőség. Most bizonyított tételünk *Ceva* nevét viseli, és ennek valóban speciális esete a súlyvonalakról szóló tétel, hiszen abban az esetben

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Ceva tétele, csakúgy, mint az előző pontban bizonyított tétel, kiterjeszthető arra az esetre, amikor a vizsgált egyenesek a háromszögön kívül metszik egymást.

A mechanika geometriai alkalmazásait érintő kirándulásunkat ezzel befejeztük, csupán az érdekesség kedvéért megemlítjük, hogy szintén statikai megfontolásokkal igazolható többek között Pitagorász-tétele vagy a körlemez egy pontján áthaladó szelőkre vonatkozó tétel.