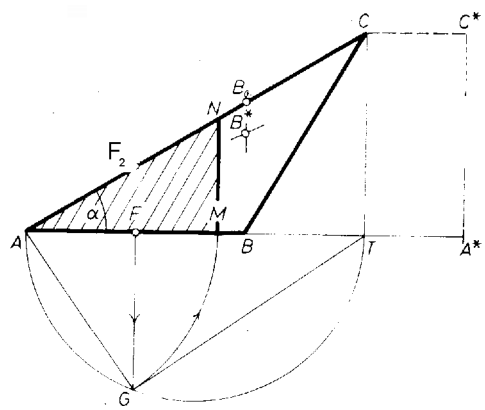
1. Az ABC háromszög AB-re merőleges területfelezőjét szerkesztjük azzal a feltevéssel, hogy az MN szelőszakasz az AB szakasz egy belső M pontjából indul ki. A további két oldalról feltehetjük, hogy $CA > CB$ – hiszen $CA = CB$ esetén nyilvánvalóan a CT magasság a felező, a feladat érdektelen, ha pedig $CA < CB$ volna, úgy az A, B betűcserével teljesül feltevésünk.



1. ábra

A kettévágott háromszög AMN része háromszög alakú, és a követelmény szerint

$$\frac{AM \cdot MN}{2} = \frac{AB \cdot TC}{4},$$

másrészt az AMN és ATC háromszögek hasonlósága alapján

$$\frac{AM}{MN} = \frac{AT}{TC},$$

és ezeket összeszorozva

$$AM^2 = \frac{AB}{2} \cdot AT = AF \cdot AT,$$

ahol F az AB alap felezőpontja. Eszerint AM az ismert AF és AT szakaszok mértani közepe.

Föltevésünk alapján $AT > AF$, és megfelel a következő szerkesztés. Legyen az AT átmérő fölötti Thalész–körnek F fölötti (alatti) pontja G, ezt A körül az AB szakaszra ráforgatva kapjuk M-et.

A szerkesztés helyessége nyilvánvaló, és a szerkesztés mindaddig használható, amíg

$$AM = \sqrt{AF \cdot AT} \le AB = 2AF,$$

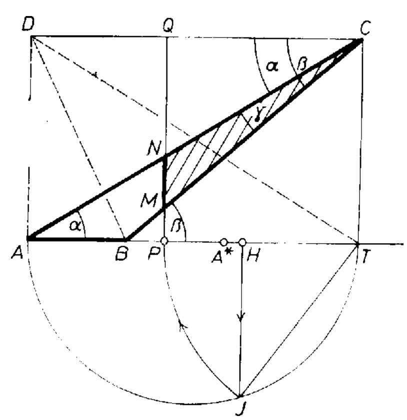
másképpen, amíg

$$AT \le 4AF = 2AB = AA^*,$$

vagyis ha T az AA^* szakaszon van, ahol A^* az A tükörképe B-re. Amennyiben A^* éppen egybeesik T-vel, akkor M egybeesik B-vel, AC-nek B fölötti B^* pontjára $BB^* = TC/2$, és az ABB^* háromszög területe valóban fele ABC területének.

2. A feladat szövege alapján szabadon választhatjuk, hogy a felezőegyenest melyik oldalra merőlegesen szerkesztjük. Ezért szerkesztésünk nyilvánvalóan minden hegyesszögű és derékszögű háromszögre érvényes, továbbá tompaszögű háromszög legnagyobb oldalára is, sőt még bizonyos $B\sphericalangle > 90^\circ$ esetekre is. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A talált szerkesztéshez nagyon hasonló eljárással $AT > AA^*$ esetén is célhoz érünk. Messe a területfelező a CB, CA, BT szakaszt, valamint a C-n át AB-vel húzott párhuzamost rendre az M, N, P, illetve Q pontban (2. ábra).



2. ábra

Ekkor háromszögünk két egyenlő területű része $ABMN$ és CMN, és az ábra további jelöléseivel

$$CMN = \frac{1}{2} CM \cdot CN \sin\gamma = \frac{CQ^2 \sin\gamma}{2\cos\beta\cos\alpha} = \frac{1}{2} CBA = \frac{1}{4} CB \cdot CA \sin\gamma,$$

$$CQ = TP = \sqrt{\frac{1}{2} CB \cos\beta \cdot CA \cos\alpha} = \sqrt{\frac{TB}{2} \cdot TA} = \sqrt{TH \cdot TA} = TJ.$$

Azt is látjuk innen az eredeti megoldás kellő átbetűzésével, hogy az ABC háromszög AB-re merőleges területfelezője azonos a DBC háromszög DC-re (AB-re) merőleges területfelezőjével, ahol D az A vetülete a C-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesen.

2. Lényegében ugyanígy szerkeszthetjük az osztóvonal N végpontját is. Az 1. ábra esetében

$$AMN = \frac{1}{2} AN^2 \cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{4} AB \cdot AC \sin\alpha,$$

$$AN = \sqrt{\frac{AB_0}{2} \cdot AC} = \sqrt{AF \cdot AC}.$$

3. Könnyen átvihetők eredményeink felezés helyett tetszőleges, 0 és 1 közti, szerkeszthető λ szám esetén a háromszöget $\lambda : (1-\lambda)$ arányban osztó egyenes kijelölésére.