I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, melynek koordinátáira $\big||x-3|-1\big| < y \leqq 2$ teljesül.

2. Hosszabbítsa meg egy szabályos hatszög minden oldalát a saját hosszával (egy meghatározott körüljárási irányt tartva). A végpontok összekötésével nyert új hatszög területe hányszorosa az eredetinek?

3. Adott három, különböző pozitív számjegy. Képezze e három számjegyből az összes lehetséges – különböző számjegyekből álló – egy, két és háromjegyű számot, és adja ezeket össze. Lehet-e az összeg a) 1988; b) 2000?

4. Melyik nagyobb:
$$1988^{1988} \text{ vagy } 1987^{1987} + 1988^{1987} + 1987^{1988}?$$

5. Adott a síkon két egymásra merőleges egyenes, e és f, egy C pont és egy d távolság. Szerkesszen olyan derékszögű háromszöget, melynek derékszögű csúcsa a C pont, átfogója d hosszúságú és az átfogó egy-egy végpontja az e, illetve f egyenesen van.

6. Gondoltam egy számot. Ha 7-tel osztom, a maradék 6; ha 4-gyel osztom, a maradék 1. Mennyi a maradék, ha 28-cal osztom?

7. Oldja meg az $\Big[\big|[x]\big| - \big[|x|\big]\Big] = 0$ egyenletet! ($[z]$ a z szám egészrészét jelenti, azt a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb z-nél.)

8. Legyen n (tízes számrendszerben) legalább k jegyű természetes szám. Igazolja, hogy az alábbi állítások ekvivalensek!
a) n^4 utolsó k db jegye azonos n utolsó k db jegyével.
b) n^2 utolsó k db jegye azonos n utolsó k db jegyével.

Haladók (II. osztályosok)

1. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az
$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}x - x\sqrt{x-2}}}{\sqrt{\sqrt{x}-2}+1}$$
függvény értelmezhető.

2. Van-e olyan háromszög, melynek két oldala 1 és 4 cm, valamely két magassága pedig 3 és 4 cm hosszú?

3. Hány téglalap jelölhető ki a rajzon látható 4×10-es rács vonalaival?

1988-11-357-1.eps

4. A p prímszám (a tízes számrendszerben felírva) páros sok jegyet tartalmaz. Ha a p számot fordított sorrendben írjuk fel, visszakapjuk saját magát. Határozzuk meg p-t.

5. Az ABC derékszögű háromszögbe írt négyzet két csúcsa az AB átfogón, másik két csúcsa pedig a befogókon van. Mekkora a befogók aránya, ha a négyzet K középpontjára igaz, hogy $CAB\sphericalangle = ABK\sphericalangle$?

6. Legyenek x és y valós számok. Tudjuk, hogy az $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$ számok egyike sem 0 és közülük három racionális. Mutassuk meg, hogy x és y racionális számok.

7. Tetszőleges számú egységnyi, illetve két egységnyi oldalú négyzet áll rendelkezésünkre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható 1987 darab úgy, hogy belőlük ki lehessen rakni egy négyzetet (hézagtalanul és egyrétűen); viszont bárhogyan is választunk ki 1988 darabot, azokból sohasem állítható elő négyzet.

8. Az a, b, c valós számok olyanok, hogy $|ax^2+bx+c| \leqq 1$, ha $|x| \leqq 1$. Mutassuk meg, hogy $|x| \leqq 1$ esetén $|cx^2-bx+a| \leqq 4$ is teljesül.

II. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. A $2bx+b=3cx+c$ egyenletben b is és c is az 1; 2; …; 9 értékeket veheti fel. Melyik b, c számpárokra lesz az egyenlet gyöke pozitív?

2. Szerkessze meg az $ABCD$ paralelogrammát, ha adott az AC átló, valamint a sík egy adott P pontjának a csúcsoktól mért távolsága (PA, PB, PC, PD).

3. Adja meg bármely n pozitív egész számra az $1^n+2^n+3^n+4^n$ szám utolsó számjegyét.

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Az ABC hegyesszögű háromszög A-hoz tartozó magasságának talppontja A', B-hez tartozó magasságának talppontja B', a magasságpont M. Bizonyítsa be, hogy az MC, $B'A'$, AB szakaszok felezőpontjai egy egyenesre esnek!

2. Egy hálózat 6 pontból és 10 élből áll. A hat pont egy szabályos ötszög öt csúcsa és középpontja. Az élek az ötszög oldalélei valamint a középpontból a többi csúcsba vezető sugarak. Minden ponthoz egy-egy valós számot rendelünk. Egy él teljesítményének nevezzük az él két végpontjába írt számok különbségének a négyzetét. Legyen a középpontba írt szám 0, egy másik pontba írt szám 1. Határozza meg a fennmaradó négy pontba írt számot úgy, hogy a tíz él teljesítményének összege minimális legyen.

3. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ pozitív páratlan számok. Bizonyítsa be, hogy van olyan négyzetszám (k^2), amelyre

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq k^2 \leqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}!$$

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Osszuk fel a síkot egy körvonallal, egy téglalappal és egy háromszögvonallal a lehető legtöbb tartományra! Hány rész érhető el?

2. $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ pozitív páratlan számok. Bizonyítsa be, hogy van olyan négyzetszám (k^2), amelyre

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leqq k^2 \leqq a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}!$$

3. Milyen téglalap alakú sakktáblák fedhetők le egyrétűen az ábrán látható egybevágó alakzatokkal?

1988-11-358-1.eps

Haladók (II. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + x^{10} = 1.$$

2. A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A körökön kívüli P pontot összekötöttük az A és B pontokkal. A PA és PB egyenes a köröket további C, D, E és F pontokban metszi (lásd az ábrát). Bizonyítsuk be, hogy $PC \cdot PD \cdot PA^2 = PE \cdot PF \cdot PB^2$. ($PC$, PD stb.... a szakaszok hosszát jelöli.)

1988-11-358-2.eps

3. Az n természetes szám olyan, hogy $2n+1$ és $3n+1$ is négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy n osztható 8-cal.

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Az ABC háromszög magasságpontja M. Tudjuk, hogy $AB = CM$. Mekkora lehet a háromszög C csúcsnál levő szöge?

2. Az $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ és az $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ másodfokú egyenletek együtthatói egészek. Tudjuk, hogy az egyenleteknek van olyan közös gyöke, amely nem egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

3. Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincsen öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból.

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy minden x pozitív valós számra teljesül az

$$\left(\frac{1}{2^x}\right)^{1+\frac{2}{x}} + \left(1 - \frac{1}{2^{x+1}}\right)^{1+\frac{2}{x}} < 1$$

egyenlőtlenség.

2. Az ABC hegyesszögű háromszög M magasságpontjának az A, B, C csúcsoktól vett távolsága rendre x, y, z. Bizonyítsuk be, hogy $abc = ayz + xbz + xyc$, ahol a, b, c rendre a háromszög A, B, C csúcsaival szemközti oldalainak hosszát jelöli.

3. Adott a síkon véges sok párhuzamos oldalú téglalap úgy, hogy bármely $k+1$ között található két olyan, melynek van közös pontja. Mutassuk meg, hogy megadható k^2 darab pont, melyek közül bármely téglalap tartalmaz legalább egyet.