Első forduló

I. és II. kategória

1. Egy tanácstagi választáson két jelölt indult. A választáson a szavazásra jogosultak 90%-a vett részt, de 60-an érvénytelen szavazatot adtak le. A megválasztott tanácstag a szavazatra jogosultak 49%-ának szavazatát kapta; 492-vel többet, mint vetélytársa.

Mennyi volt a szavazásra jogosultak száma?

Az érvényes szavazatoknak hány százalékát adták le a megválasztott tanácstagra?

2. Egy háromoldalú gúla egyik csúcsából kiinduló élek páronként merőlegesek egymásra. Az ebben a csúcspontban találkozó lapok területe rendre A, B, ill. C. Fejezzük ki a gúla térfogatát A, B és C segítségével.

3. Legyen ABC egyenlő oldalú háromszög! Legyen továbbá x tetszés szerint megadott szakasz! Az ABC háromszög mindegyik oldalát meghosszabbítjuk ezzel az x hosszúságú szakasszal, mégpedig BA-t A-n túl A'-ig, CB-t B-n túl B'-ig és AC-t C-n túl C'-ig.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $A'B'C'$ háromszög köré írt kör középpontja azonos az ABC háromszög köré írt kör középpontjával.

4. Egy kocka éleit tetszőleges módon megszámoztuk az 1-től 12-ig terjedő egész számokkal. Ezek után a kocka mindegyik csúcsához felírtuk azt a számot, amelyik egyenlő a belőle kiinduló élekhez írt számok összegével.

a) Bizonyítsuk be, hogy ezek az összegek nem lehetnek mind egyenlők.

b) Vajon egyenlők lehetnek-e valamennyien abban az esetben, ha az egyik élhez írt számot 13-ra változtatjuk?

5. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha (belső) szögeinek α, β, γ mérőszámai eleget tesznek a

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$$

egyenlőségnek.

6. Határozzuk meg az egész a, b paramétereknek mindazokat az értékeit, amelyekre az

$$(a^2+b^2)x^2 + (4ab+1)x + (a^2+b^2) = 0$$

egyenletnek legalább az egyik gyöke egész szám.

III–IV. kategória

1. Az ABC háromszög oldalaira szerkesszünk hasonló egyenlő szárú háromszögeket, az ABX háromszöget befelé, a BCY, CAZ háromszögeket pedig kifelé; az alappal szemközti csúcsok rendre X, Y, és Z. Bizonyítsuk be, hogy ha az X, Y, C, Z pontok nincsenek egy egyenesen, akkor egy paralelogramma csúcsai.

2. Igazoljuk számológép használata nélkül, hogy

$$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{1987\sqrt{1988}+1988\sqrt{1987}}$$

nagyobb, mint $\dfrac{43}{44}$ és kisebb, mint $\dfrac{44}{45}$.

3. Írjunk az egységsugarú kör köré egyenlő szárú háromszöget. Mennyi a szár hosszának lehető legkisebb értéke?

4. Adott a síkon n pont ($n \geqq 3$), amelyek közül semelyik három sem esik egy egyenesbe. A pontok közül pontpárokat választunk ki és ezeket szakaszokkal kötjük össze úgy, hogy a meghúzott szakaszok ne messék egymást (a végpontjaik lehetnek közösek). Igazoljuk, hogy bárhogyan is választjuk ki az összekötött pontpárokat, az így meghúzható szakaszok maximális száma mindig ugyanannyi.

5. A és B olyan érmével játszanak, amelyen a fej dobásának a valószínűsége $p (0 < p < 1)$. Ismételten dobálják az érmét, amíg az FFF vagy az FIF sorozat valamelyike meg nem jelenik. Ha FFF előbb jön ki, mint az FIF, akkor A nyer, ha pedig az FIF jelenik meg előbb, mint FFF, akkor B nyer. A p milyen értékére igazságos a játék?

A második (döntő) forduló feladatai

I. kategória

1. Az ABC háromszög BAC szöge derékszög. Az A csúcsból húzott magasság talppontja D, a BAC szög szögfelezőjének talppontja E. Jelöljük továbbá a BDA szög szögfelezőjének talppontját M-mel, az ADC szög szögfelezőjének talppontját N-nel. Mutassa meg, hogy az $AMEN$ négyszög négyzet.

2. Oldja meg az alábbi egyenlőtlenséget!

$$\log_{|x|}|2x| < 0.$$

3. A természetes számok sorozatában kijelölünk $2n+1$ egymás után következő számot úgy, hogy a sorozat első $n+1$ számának négyzetösszege egyenlő a maradék n szám négyzetének összegével.

Hogyan kell az n értéket megválasztani?

Van-e olyan megoldás, amelyben a $2n+1$ szám között az 1988 is előfordul?

II. kategória

1. Mely pozitív egész n számok esetén négyzetszám, azaz egyenlő valamely egész szám négyzetével a következő összeg:

$$S_n = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + \ldots + 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n?$$

2. Az $ABCD$ síknégyszög AC és BD átlója a négyszög belsejében levő O pontban metszi egymást. Az AOB háromszög területét jelölje T_1, a COD háromszög területét T_2, végül az $ABCD$ négyszög területét T.

a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2} \leqq \sqrt{T}.$$

b) Bizonyítsuk be továbbá, hogy az előbbi összefüggésben akkor és csak akkor érvényes az egyenlőség, ha AB és CD párhuzamosak.

3. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + \frac{3}{4}$$

polinomfüggvénynek nincs valós zéróhelye.

III. kategória

1. Az ABC háromszög köré irt körhöz C-ben húzott érintő az AB egyenest a P pontban metszi (P és B az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak). Jelöljük F-fel, illetve H-val a CPA háromszög P-beli külső szögfelezőjének az AC, illetve a BC egyenessel való metszéspontját. Bizonyítsuk be, hogy a CH szakasz az AF és BH szakaszok mértani közepe.

2. Legyen k tetszőleges pozitív egész. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x_1 = k, \quad x_{n+1} = kx_n + \sqrt{(k^2-1)(x_n^2-1)}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

formában megadott sorozat elemei pozitív egészek.

3. Legyen n pozitív egész, és H az egész számoknak olyan halmaza, hogy minden eleme vagy két H-beli elem összege, vagy egy H-beli elem kétszerese. Továbbá minden olyan legfeljebb n-tagú összeg, amelynek valamennyi eleme H-ból való, nem egyenlő nullával. Megengedünk egytagú összeget is. Bizonyítsuk be, hogy H-nak legalább $2n+2$ eleme van.

IV. kategória

1. Egy n-elemű halmaz összes részhalmaza közül találomra kiválasztunk egyet, majd újra az összes részhalmaz közül megint találomra választunk ki egyet. Bizonyítsuk be, hogy annak a valószínűsége, hogy a két kiválasztott részhalmaz közül az egyik tartalmazza a másikat:

$$2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Legyen $N = 1988! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot 1988$, és tekintsük az összes $i\cdot j$ szorzatot, ahol $0 \leqq i \leqq N-1$, $0 \leqq j \leqq N-1$. Ha ezt az N^2 darab szorzatot maradékosan elosztjuk N-nel, akkor a kapott maradékok között

a) a 2 vagy a 3 fordul elő többször?

b) a 2 vagy az 1987 fordul elő többször?

3. Ha $k > 1$ természetes szám és S egy konvex sokszög, azt mondjuk, hogy S k-adolható, ha elhelyezhető a síkon k db egy pontból induló félegyenes úgy, hogy a szomszédos félegyenesek szöge $\frac{2\pi}{k}$, és a félegyenesek az S sokszöget k egyenlő területű részre osztják. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan S konvex sokszög, amely semmilyen $k \geqq 5$ esetén sem k-adolható.