(Valamennyi felvételiző számára)

1. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1.$$

(9 pont)

2. Egy számtani sorozat első három elemének összege 105. Ha az első két számot változatlanul hagyjuk és a harmadik számhoz 108-at adunk, akkor egy mértani sorozat első három eleméhez jutunk. Számítsa ki a számtani sorozat első három elemét!

(11 pont)

3. Mely valós számok elégítik ki a következő egyenletet?

$$\lg(4^{x-2}+9)-\lg(2^{x-2}+1)+\lg 2-1=0.$$

(12 pont)

4. Egy háromszög egyik szöge egyenlő a másik két szög összegével. A háromszög köré írható kör sugara 6 egység, a legkisebb oldalra rajzolható négyzet területe egyenlő a háromszög területével. Számítsa ki a háromszög területét!

(12 pont)

5. Az ABC háromszögben $AB=BC$. Jelölje a BC felezőpontját F, a BC oldalhoz tartozó magasság talppontját T. Számítsa ki a B és C csúcs koordinátáit, ha $A(-2;1)$, $T(16;1)$ és F második koordinátája 13.

(14 pont)

Gimnazisták számára ajánlott

6. Legyenek x, y, z olyan valós számok, hogy $xyz=1$ és $1+z+zx\neq 0$. Igazolja hogy az

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

kifejezés értelmezve van, és értéke független az x, y, z választásától!

(12 pont)

7. Egy háromszög szögeinek tangensei úgy aránylanak egymáshoz, mint $1:2:3$. Hogyan aránylanak egymáshoz a háromszög oldalai?

(15 pont)

8. Az $ABCD$ négyszög síkjában tetszőlegesen felvett P pontnak A-ra vonatkozó tükörképe Q, a B-re vonatkozó tükörképe pedig R. Bizonyítsa be, hogy az $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha Q-nak D-re vonatkozó tükörképe egybeesik R-nek C-re vonatkozó tükörképével!

(15 pont)

Szakközépiskolások számára ajánlott

6. Az $ABCD$ téglalapban $AB=2a$ és $BC=a$. Az AB és AD oldalak mint átmérők fölé köröket rajzolunk; ezeknek a téglalap belsejébe eső metszéspontja M. Mutassa meg, hogy M a BD átlón van. Mekkora az MA, MB és MD szakaszok hossza?

(13 pont)

7. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$x^2+2x\sin xy+1=0.$$

(14 pont)

8. Igazolja, hogy ha az a és b valós számok összege 1, akkor

$$a^4+b^4\geqq\frac{1}{8}.$$

(15 pont)