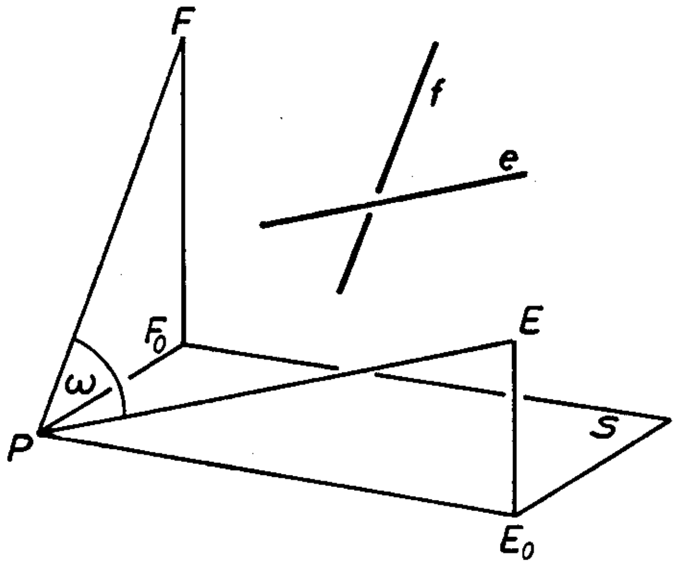
Legyen P az S és T síkok metszésvonalának tetszőleges pontja, és legyenek E, F olyan pontok a térben, amelyekre PE az e-vel, PF az f-fel párhuzamos, továbbá a PE, PF szakaszok hossza egységnyi. Azt fogjuk megmutatni, hogy az $\omega = EPF$ szögre

(1) $$|\cos\omega| \leq 1/3$$

teljesül, amiből következik a feladat állítása.



Jelöljük az E, F pontok S-en levő vetületét E_0-lal, F_0-lal, akkor a feladat szerint E_0P merőleges F_0P-re, Először a koszinusz tételt, majd Pitagorasz tételét alkalmazva kapjuk, hogy

$$EF^2 = 2 - 2\cos\omega = E_0F_0^2 + (E_0E - F_0F)^2 = (PE_0^2 + E_0E^2) + (PF_0^2 + F_0F^2) - 2E_0E \cdot F_0F = 2 - 2E_0E \cdot F_0F,$$

ahol az E_0E, F_0F távolságokat előjelesen értjük: egyező az előjelük, ha egyirányúak. A két összefüggésből adódik, hogy

(2) $$\cos\omega = E_0E \cdot F_0F.$$

Vezessünk be térbeli koordináta-rendszert úgy, hogy annak P legyen az origója, az y tengely S és T metszésvonalán legyen, az x tengely S-ben, a z tengely T-ben, és jelöljük E, F koordinátáit $(e_1; e_2; e_3)$-mal, illetve $(f_1; f_2; f_3)$-mal. Akkor

(3) $$\sum_{i=1}^{3} e_i^2 = \sum_{i=1}^{3} f_i^2 = 1,$$

és (2)-t először változtatás nélkül, majd S és T szerepének felcserélésével alkalmazva kapjuk, hogy

(4) $$e_3f_3 = e_1f_1 = \cos\omega$$

Az $(x; y)$ síkban az E_0, F_0 pontok koordinátái $(e_1; e_2)$, illetve $(f_1; f_2)$, így ismét az E_0F_0P derékszögű háromszögben alkalmazva Pitagorasz tételét, kapjuk, hogy

$$(e_1 - f_1)^2 + (e_2 - f_2)^2 = (e_1^2 + e_2^2) + (f_1^2 + f_2^2),$$

vagyis

(5) $$e_1f_1 + e_2f_2 = 0.$$

(4) és (5) alapján látható, hogy $\cos\omega$ értéke $-e_2f_2$-vel is egyenlő, (1) tehát következik a

(6) $$|e_1f_1 - e_2f_2 + e_3f_3| \leq 1$$

egyenlőtlenségből, hiszen esetünkben a bal oldalon álló három mennyiség egyenlő.

Így már csak (6) igazolása van hátra. Legyen még $g_1 = e_1$, $g_2 = -e_2$, $g_3 = e_3$, akkor (6) a nevezetes

(7) $$\left(\sum_{i=1}^{3} f_i g_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{3} f_i^2 \sum_{i=1}^{3} g_i^2$$

egyenlőtlenség alapján következik (3)-ból. A (7) egyenlőtlenség legegyszerűbben annak alapján látható be, hogy a

$$\sum_{i=1}^{3}(f_i - tg_i)^2 = \sum_{i=1}^{3} f_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{3} f_i g_i + t^2\sum_{i=1}^{3} g_i^2$$

másodfokú polinom értéke minden valós t mellett nem negatív, így a diszkriminánsa nem lehet pozitív.

Megjegyzés. Ha megoldásunk elején nem alkalmaztuk volna a Pitagorasz tételt, azt kaptuk volna, hogy

$$\cos\omega = \sum_{i=1}^{3} e_i f_i.$$

Szokás a jobb oldalon álló mennyiséget az $(e_1; e_2; e_3)$, $(f_1; f_2; f_3)$ vektorok skaláris szorzatának nevezni. A név arra utal, hogy bár vektorokat szorzunk össze, az eredmény szám, skaláris mennyiség. Jól látható itt a szorzás fogalmának kettős tulajdonsága: van amikor két mennyiség szorzata ugyanolyan típusú mennyiség, mint a szorzandók, és van, hogy a szorzat a mennyiségek típusától függetlenül egyetlen, a mennyiségek viszonyát kifejező valós szám. Az utóbbi esetben ha a szorzat értéke 0, szokás egymásra merőlegesnek mondani a mennyiségeket, hiszen két és három dimenzióban így épp azokat a vektorokat mondjuk merőlegeseknek, amelyek geometriai értelemben is merőlegesek.