(Valamennyi felvételiző számára)

1. Közelítő értékek használata nélkül számítsa ki a következő kifejezések értékét:

$$A = 10^{1-\lg 2} + 3^{\log_9 36}, \quad B = 125^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{1000} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{6}} \sqrt{2},$$
$$C = \sqrt{\lg\ \mathrm{tg}\ 36^\circ + \lg\ \mathrm{tg}\ 54^\circ}.$$

(9 pont)

2. Legyen AB egy egység sugarú kör egyik átmérője, C pedig a körhöz az A pontban húzható érintőnek olyan pontja, hogy az AC szakasz hossza $2\sqrt{3}$. Számítsa ki az ABC háromszög és a kör közös részének a területét!(11 pont)

3. Egységnyi oldalú kis kockákból egy nagyobbat állítunk össze. Ha a rendelkezésünkre álló kis kockákból a lehető legnagyobb kockát rakjuk össze, akkor még 107 kis kockánk marad. Ha azonban eggyel több kis kockát akarunk rakni minden él mentén, akkor még 62 kis kockára lenne szükségünk. Hány darab kis kockánk van? (12 pont)

4. Mely valós számpárokra igaz a következő egyenletrendszer:

$$y - x = 44,$$
$$\sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}.$$

(13 pont)

5. Az $x + y = 30$ egyenletű egyenesnek az X és az Y tengellyel való metszéspontját jelölje A, illetve B, és legyen az origó O. Írja fel annak az e egyenesnek az egyenletét, amelyik párhuzamos az $x - 3y = 6$ egyenessel, metszi az OB szakaszt a C, az AB szakaszt a D pontban, és amelyre az $OADC$ négyszög területe 234 egység! (13 pont)

Gimnazisták számára ajánlott

6. Adott p és q valós számokhoz határozza meg az összes olyan számtani sorozat első elemét és különbségét, amelyben az első négy elem összege p, a negyedik és az első elem hányadosa pedig q. (13 pont)

7. Oldja meg a következő egyenletet, ha tudja, hogy p prímszám és n pozitív egész szám:

$$1 + p + p^2 + \cdots + p^n = 2801.$$

(14 pont)

8. Egy egységnyi oldalú kockának tekintsük azt a négy csúcsát, amelyek közül bármelyik kettő nem esik a kockának ugyanazon élére. A négy pont által meghatározott tetraédert messük el olyan síkkal, amely a tetraéder két szemközti élével párhuzamos. Az összes ilyen síkot figyelembe véve mennyi lesz a keletkezett síkmetszet kerületének és területének maximális értéke? (15 pont)

Szakközépiskolások számára ajánlott

6. Két egyenes henger térfogatának különbsége 48π, a palástok területének különbsége 24π. A nagyobb térfogatú henger alapkörének sugara 1-gyel nagyobb a másikénál, magassága pedig a másik magasságának $\frac{4}{3}$-szorosa. Mekkora a hengerek magassága és alapkörüknek a sugara? (13 pont)

7. Oldja meg a valós számpárok halmazán a következő egyenletet:

$$2\cos^2 \frac{x^2 + 3y}{6} = 3^x + 3^{-x}.$$

(14 pont)

8. Egy pozitív számokból álló mértani sorozat első n elemének összege S, az első n elem reciprokainak összege R.

Fejezze ki az első n elem szorzatát az S-sel, R-rel és n-nel! (15 pont)