

(Valamennyi felvételiző számára)

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\frac{4}{x} + \frac{5}{y} = 23, \quad \frac{5}{x} - \frac{4}{y} = -2.$$

(9 pont)

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\lg x} + \left(\frac{4}{3}\right)^{\lg x} = \frac{25}{12}.$$

(11 pont)

3. Egy  $t$  területű kör köré olyan rombuszt rajzolunk, amelynek egyik szöge  $30^\circ$ -os. Fejezze ki a rombusz területét  $t$  segítségével!

(12 pont)

4. Mely valós  $x$ -ekre értelmezhetők az alábbi kifejezések:

$$a) \sqrt{3 - \sqrt{x-2}}; \quad b) \sqrt{x - \sqrt{x-2}}; \quad c) \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

(13 pont)

5. Az  $ABC$  háromszögben az  $A$  csúcsnál levő szög a  $B$  csúcsnál levő szögnek kétszerese, továbbá a  $BC$  oldal kétszerese egyenlő az  $AC$  oldal háromszorosával, a háromszög területének mérőszáma pedig a  $C$  csúcsnál levő szög sinusának  $27$ -szerese. Számítsa ki a háromszög szögeit és oldalait!

(13 pont)

A. *Gimnazisták számára ajánlott*

6. Írja fel annak a körnek az egyenletét, amelynek középpontja az  $x$  tengelyen van és amely az  $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 87 = 0$  egyenletű  $k_1$  kört belülről, az  $x^2 + y^2 - 20x - 12y + 111 = 0$  egyenletű  $k_2$  kört pedig kívülről érinti!

(13 pont)

7. Egy gúla alaplapja négyzet, oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek. A gúla magassága  $30^\circ$ -os szöget zár be a gúla oldallapjaival. Írjon a gúlába kockát úgy, hogy a kocka négy csúcsa a gúla alaplapjára illeszkedjék, másik négy csúcsa pedig az oldallapokon helyezkedjék el úgy, hogy a gúla csúcsából kiinduló magasságvonalakra illeszkedjék!

Számítsa ki a gúla és a kocka térfogatának arányát!

(14 pont)

8. Legyenek  $p$  és  $q$  pozitív egész számok, és  $q \geq p$ . Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{q + \frac{1}{2}}{p - \frac{1}{2}} > \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \dots + \frac{1}{q}.$$

(15 pont)

B. *Szakközépiskolások számára ajánlott*

6. Az  $x - 2 = (y - 1)^2$  egyenletű parabola  $P_1$  és  $P_2$  pontjaiból az  $A(2; 1)$  és  $B(6; 1)$  pontok által határolt szakasz derékszögben látszik. Mekkora az  $AP_1BP_2$  négyszög területe?

(13 pont)

7. Egy egyenes körhenger magassága  $2$ , sugara  $7$ . Ebbe a hengerbe olyan négyzetet írunk, amelynek síkja metszi a henger tengelyét. A négyzet csúcsai az alap-, illetve a fedőkör kerületén helyezkednek el. Számítsa ki a négyzet oldalát, továbbá a henger tengelyének a négyzet síkjával bezárt szögét!

(14 pont)

8. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$2\sqrt{|1 - 2x|} \geq 1 + x.$$

(15 pont)