1. Bizonyítsuk be, hogy egyetlen egész együtthatós $P(x)$ polinomhoz sem találhatók olyan különböző x_1, x_2, …, x_n ($n \geqq 3$) egész számok, amelyekre $P(x_1) = x_2$, $P(x_2) = x_3$, …, $P(x_{n-1}) = x_n$, $P(x_n) = x_1$.

2. Az a_n számsorozat ($n = 1, 2, \ldots$) különböző pozitív egész számokból áll és teljesül rá, hogy $a_n < 100n$. Bizonyítsuk be, hogy a számsorozatban van olyan elem, melynek tízes számrendszerbeli felírásában

a) előfordul az egyes számjegy;

b) előfordul 1986 darab egyes egymás után.

3. Három sokszög úgy helyezkedik el a térben, hogy síkjaiknak egyetlen közös O pontja van.

a) Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan sík, amelyre a három sokszöget vetítve a vetületek területe egyenlő.

b) Hány ilyen sík megy át az O ponton?

4. Egy buszra a végállomáson 32 utas száll fel, akik 32 különböző, egymástól 1-1 kilométerre levő megállóig akarnak utazni. A vezető indulás előtt szavazást tart arról, hogy melyik megállókban álljanak meg. Egy általa kiválasztott sorrendben felsorolja a 32 megállót, és az utasok minden egyes megállóra külön-külön szavaznak. Egy utas a megálló kihagyására szavaz, ha távolabb akar utazni, tartózkodik, ha közelebb, és csak akkor szavaz az adott megálló mellett, ha éppen ott kíván leszállni. Ha többen szavaznak a soron következő megálló ellen, mint mellette, akkor abban a megállóban nem áll meg a busz, és azok, akik ebben a megállóban akartak volna leszállni, a továbbiakban az ehhez legközelebbi, még nem törölt megállóig utaznak. (Ha két legközelebbi van, akkor a végállomáshoz közelebbit választják.) Természetesen minden egyes megálló esetén mindenki annak megfelelően szavaz, hogy pillanatnyilag hol akar leszállni. Határozzuk meg, hogy

a) legalább

b) legfeljebb

hány helyen áll meg a busz.

5. Bizonyítsuk be, hogy az $A = 111\ldots 11$ – 1986 darab egyesből álló – számnak legalább

a) 8,

b) 128

pozitív osztója van.

6. Egy bajnokságon 16 teniszező indult, mindenki mindenkivel egyszer játszott. Tegyük fel, hogy bármely 10 versenyzőt kiválasztva, ezek körbe állíthatók úgy, hogy mindenki legyőzte a jobb oldali szomszédját.

a) Lehetséges-e a játszmáknak ilyen kimenetele?

b) Mutassuk meg, hogy ha a fenti feltétel teljesül bármely 10 versenyzőre, akkor teljesül bármely 11-re is.

7. A síkban egy O kezdőpontból felmérünk n darab egységvektort. Bizonyítsuk be, hogy ha valamely $k < \dfrac{n}{2}$ esetén teljesül, hogy az O-n áthaladó bármely egyenes mindkét oldalán legalább k darab vektor van, akkor az összes vektor összegének hossza legfeljebb $n - 2k$. (Az egyenesen fekvő vektor mindkét félsíkhoz számítható.)

8. Keressük meg az összes olyan $a > 0$ természetes számot, amelyre $a - 1$ felírható az a szám

a) két,

b) három

osztójának összegeként. (Az osztók közé számít az 1 is, és egy osztó többször is szerepelhet az előállításban.)

c) Bizonyítsuk be, hogy bármely n-re csak véges sok olyan a szám létezik, hogy $a-1$ előáll a osztói közül n darabnak az összegeként.

9. a) Keressünk 11 egymás utáni természetes számot, melyek négyzeteinek összege négyzetszám.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $2 < n < 11$, akkor nem létezik n egymás utáni természetes szám, melyek négyzetösszege négyzetszám.

10. Az $f(x)$ folytonos függvény minden valós számra értelmezve van, és teljesül rá az

$$f\big(f(x)\big) = f(x) + x$$

feltétel.

a) Keressünk két ilyen függvényt.

b) Igazoljuk, hogy pontosan két ilyen tulajdonságú függvény van.

11. Tekintsük mindazokat az $AXBY$ tetraédereket, melyek egy adott gömb köré vannak írva. Bizonyítsuk be, hogy rögzített A és B pontok mellett az $AXBY$ térbeli négyszög szögeinek összege (azaz $AXB\sphericalangle + XBY\sphericalangle + BYA\sphericalangle + YAX\sphericalangle$) nem függ X és Y választásától.

12. a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a_1, a_2, …, a_n pozitív számokra fennáll az alábbi egyenlőtlenség, ha $c = 4$:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \ldots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} \leqq c \cdot \Big(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\Big).$$

b) Bizonyítsuk be, hogy a jobb oldalon c értékét 2-re lehet csökkenteni, de $c < 2$-re nem marad igaz az egyenlőtlenség.

13. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n$ pozitív számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek:

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geqq (a_1 - a_2 + a_3)^2; \tag{1}$$

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \geqq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2; \tag{2}$$

$$a_1^2 - a_2^2 + \ldots - (-1)^n \cdot a_n^2 \geqq \big(a_1 - a_2 + \ldots - (-1)^n \cdot a_n\big)^2. \tag{3}$$

14. Bizonyítsuk be, hogy egy síkon el lehet helyezni átfedés nélkül néhány körlemezt úgy, hogy mindegyik pontosan 5 másikat érintsen.

Mutassuk meg, hogy 5 helyett 6 érintő körre ez már nem igaz.