Az alábbiakban a háromszögek talpponti háromszögének egy tulajdonságát fogjuk igazolni. Ez vezet majd el egy bizonyos sorozat konvergenciájának felismeréséhez, végül pedig a határérték kiszámításához.

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, oldalainak hosszúsága a, b és c. Jelöljük a háromszög köré írt kör sugarát R-rel, a háromszög területét T-vel. Ismeretes, hogy

$$T=\frac{abc}{4R}. \tag{1}$$

1988-12-433-1.eps

1. ábra

A háromszög magasságvonalait jelöljük AM_A, BM_B, CM_C-vel, a magasságpontot M-mel (1. ábra); legyenek a háromszög A, B, C csúcsánál lévő szögek rendre α, β γ. Ekkor a magasságvonalak által levágott derékszögű háromszögekből

$$\begin{gathered}AMB\sphericalangle=180^\circ-M_AMB\sphericalangle=180^\circ-(90^\circ-M_ABM\sphericalangle)=\\=90^\circ+CBM_B=90^\circ+(90^\circ-\gamma)=180^\circ-ACB\sphericalangle,\end{gathered}$$

tehát M-nek az AB oldalra vonatkozó M_3 tükörképe a háromszög köré írt körön van, és ugyanígy e körön helyezkedik el M-nek a BC, ill. AC oldalakra vonatkozó M_1, ill. M_2 tükörképe is. A tükrözések miatt

$$MM_1=2\cdot MM_A,\quad MM_2=2\cdot MM_B,\quad MM_3=2\cdot MM_C,$$

így az $M_AM_BM_C$ talpponti háromszöget M-ből kétszeresére nagyítva a körbe írt $M_1M_2M_3$ háromszöghöz jutunk. A talpponti háromszög köré írható kör R' sugara tehát

$$R'=\frac{1}{2}R. \tag{2}$$

A talpponti háromszög oldalainak hosszúságát a koszinusztétel segítségével határozhatjuk meg; például

$$\begin{gathered}M_AM_C^2=M_AB^2+M_CB^2-2M_AB\cdot M_CB\cdot\cos\beta=\\=c^2\cos^2\beta+a^2\cos^2\beta-2ac\cos^3\beta=(c^2+a^2-2ac\cos\beta)\cos^2\beta=b^2\cos^2\beta,\end{gathered}$$

azaz

$$M_AM_C=b\cos\beta, \tag{3}$$

hasonlóan

$$\begin{gathered}M_AM_B=c\cos\gamma,\\M_BM_C=a\cos\alpha.\end{gathered}$$

(1), (2) és (3) alapján az $M_AM_BM_C$ háromszög T' területére:

$$T'=\frac{abc\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{2R}=2T\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{4}$$

Ismeretes azonban (lásd pl. Reiman István: Fejezetek az elemi geometriából, 17–18. oldal), hogy egy háromszög α, β, γ szögeire

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\leqq\frac{1}{8}, \tag{5}$$

ezért (4) és (5) miatt

$$T' \leqq \frac{1}{4}T. \tag{6}$$

(6)-ban pontosan akkor áll egyenlőség, ha (5)-ben is egyenlőség van, ez pedig az idézett eredmény szerint csak szabályos háromszögnél következik be.

Mivel az $M_AM_BM_C$ háromszöget M-ből kétszeresére nagyítva a négyszeres területű $M_1M_2M_3$ háromszöghöz jutunk, ezért az utóbbi területét T''-vel jelölve, a (6) összefüggés így is írható:

$$T'' \leqq T. \tag{7}$$

Vizsgáljuk meg, milyen eljárással lehet az $M_1M_2M_3$ háromszögből az eredeti ABC háromszöget visszakapni! Mivel például AM_CC és AM_AC közös átfogójú derékszögű háromszögek, ezért AM_CM_AC húrnégyszög, tehát $AM_CM_A\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$. Hasonlóan BM_CM_BC is húrnégyszög, azaz $BM_CM_B\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$, így $AM_CM_A\sphericalangle = BM_CM_B\sphericalangle$. Ebből tüstént következik, hogy a CM_C magasságvonal felezi az $M_AM_CM_B$ szöget, és így az $M_1M_2M_3$ szöget is. A kerületi szögek tétele szerint ekkor a C pont felezi az M_3 pontot nem tartalmazó M_1M_2 körívet; hasonlóan A az M_2M_3, B pedig a megfelelő M_1M_3 körív felezőpontja. Ez a következő kérdést veti fel:

Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, és legyenek rendre A_1, B_1, C_1 az ABC háromszög köré írt kör (a harmadik csúcsot nem tartalmazó) BC, AC, AB íveinek a felezőpontjai. Igaz-e, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe legalább akkora, mint az ABC háromszögnek a területe?

1988-12-435-1.eps

2. ábra

Megmutatjuk, hogy a kérdésre a válasz igenlő, ugyanis $A_1B_1C_1$ hegyesszögű háromszög, amelynek a magasságpontjából kétszeresére nagyított talpponti háromszöge éppen ABC. Jelöljük az ABC háromszög szögeit α, β, γ-val (2. ábra). Mivel az $A_1B_1C_1$ szöghöz tartozó körív fele az AC körívnek, ezért a kerületi szögek tétele értelmében

$$\begin{aligned} A_1B_1C_1\sphericalangle &= \frac{1}{2}AB_1C\sphericalangle = \frac{1}{2}(AB_1B\sphericalangle + BB_1C\sphericalangle) = \\ &= \frac{1}{2}(ACB\sphericalangle + BAC\sphericalangle) = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma), \end{aligned}$$

hasonlóan

$$C_1A_1B_1\sphericalangle = \frac{1}{2}(\beta+\gamma), \quad A_1C_1B_1\sphericalangle = \frac{1}{2}(\alpha+\beta).$$

Az $\alpha+\beta$, $\alpha+\gamma$, $\beta+\gamma$ szögek valamennyien kisebbek 180°-nál, így $A_1B_1C_1$ valóban hegyesszögű háromszög. Nyilván

$$A_1C_1C\sphericalangle = \frac{1}{2}BC_1C\sphericalangle = \frac{1}{2}BAC\sphericalangle = \frac{1}{2}\alpha,$$

tehát

$$A_1C_1C\sphericalangle + C_1A_1B_1\sphericalangle = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}(\beta+\gamma) = 90^\circ,$$

azaz A_1B_1 merőleges CC_1-re, ugyanígy A_1C_1 és BB_1, illetve B_1C_1 és AA_1 is merőlegesek. Ez a korábbiak szerint azt jelenti, hogy $A_1B_1C_1$ talpponti háromszögét a magasságpontból kétszeresére nagyítva ABC-hez jutunk, ezért (7) miatt az ABC háromszög területe legfeljebb akkora, mint az $A_1B_1C_1$ háromszögé. A B_1C_1, A_1C_1, A_1B_1 körívek felezőpontjai által meghatározott $A_2B_2C_2$ háromszög területe ugyanígy nagyobb (vagy egyenlő) az $A_1B_1C_1$ háromszög területénél, és legfeljebb akkora, mint a belőle hasonlóan képezett $A_3B_3C_3$ háromszögnek a területe.

Az eljárást tovább folytathatjuk, és az így egymás után keletkező $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, … háromszögek területei egy növekvő számsorozatot alkotnak. Valamennyi háromszög területe kisebb az őket tartalmazó kör területénél; a területek sorozata tehát konvergens. Próbáljuk meg kiszámítani ezt a határértéket! A kiindulási háromszög oldalait a, b, c-vel, szögeit α, β, γ-val, a köréírt kör sugarát R-rel jelöljük. Mivel

$$a = 2R\sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma,$$

ezért az ABC háromszög területe (1) alapján

$$T_0 = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$$

illetve ugyanígy – az $A_nB_nC_n$ háromszög α_n, β_n, γ_n szögeivel az $A_nB_nC_n$ háromszög területe

$$T_n = 2R^2 \sin\alpha_n \sin\beta_n \sin\gamma_n.$$

Az egymásra következő háromszögek képzési szabálya szerint a szögek sorozatára:

$$\alpha_{n+1} = \frac{\beta_n + \gamma_n}{2}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\alpha_n + \gamma_n}{2}, \quad \gamma_{n+1} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{2}.$$

Ennek az összefüggésnek és néhány kísérleti próbálkozásnak alapján az az érzésünk támadhat, hogy n növekedtével a szögek egyre inkább „kiegyenlítődnek”, azaz α_n, β_n és γ_n határértéke egyaránt $60°$. Látni fogjuk, hogy ez valóban így is van. Valamivel általánosabban a következő állítást bizonyítjuk ehhez be:

(8) *Ha $x_0,\ y_0,\ z_0$ tetszőleges valós számok, és az $(x_n),\ (y_n),\ (z_n)$ sorozatokat az*

$$x_{k+1} = \frac{y_k + z_k}{2}, \quad y_{k+1} = \frac{x_k + z_k}{2}, \quad z_{k+1} = \frac{x_k + y_k}{2}$$

szabály szerint képezzük, akkor mindhárom sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \frac{x_0 + y_0 + z_0}{3} = A.$$

Vegyük észre, hogy $x_n + y_n + z_n = x_0 + y_0 + z_0 = 3A$. Ezt az n-re vonatkozó teljes indukcióval láthatjuk be; $n = 0$-ra állításunk nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy $x_k + y_k + z_k = 3A$, ekkor

$$x_{k+1} + y_{k+1} + z_{k+1} = \frac{y_k + z_k}{2} + \frac{x_k + z_k}{2} + \frac{x_k + y_k}{2} = x_k + y_k + z_k = 3A,$$

tehát az állítás minden k-ra fennáll. Ennek felhasználásával kapjuk, hogy

$$x_{n+1} = \frac{y_n + z_n}{2} = \frac{3A - x_n}{2},$$

így

$$A - x_{n+1} = \frac{x_n - A}{2},$$

következésképpen (minden n-re)

$$|x_{n+1} - A| = \frac{|x_n - A|}{2}.$$

Ebből az n-re vonatkozó indukcióval egyszerűen adódik, hogy

$$|x_n - A| = \frac{|x_0 - A|}{2^n}.$$

Nyilván $|x_0 - A|$ nem függ n-től, $1/2^n$ pedig n növekedtével 0-hoz tart, így $|x_n - A|$ határértéke is 0, azaz (x_n) határértéke A; ugyanígy bizonyítható be, hogy az $(y_n),\ (z_n)$ sorozatok is A-hoz tartanak.

A bizonyított (8) állítás felhasználásával az $A_nB_nC_n$ háromszögek területének határértéke már igen könnyen kiszámítható. (8) miatt ugyanis $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 60°$, ezért a szinuszfüggvény folytonossága miatt – a háromszögek területének határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} 2R^2 \sin\alpha_n \sin\beta_n \sin\gamma_n = 2R^2(\sin 60°)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

A (8) állítás bizonyításának mintájára könnyen igazolhatjuk (8) következő általánosítását:

(9) *Legyenek $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \ldots, a_1^{(k)}$ tetszőleges valós számok, és képezzük az $(a_n^{(1)}), (a_n^{(2)}), \ldots, (a_n^{(k)})$ sorozatokat az*

$$a_{n+1}^{(l)} = \frac{1}{k-1}(-a_n^{(l)} + \sum_{i=1}^{k} a_n^{(i)})$$

szabály szerint $(l = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$. Ekkor az $(a_n^{(l)})$ sorozatok konvergensek, és közös határértékük:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{(l)} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_1^{(i)}.$$

A (9) állításból az $a_1^{(1)} = a_1$, $a_1^{(2)} = a_1^{(3)} = \ldots = a_1^{(k)} = a_2$ speciális eset révén a következőt bizonyíthatjuk be:

(10) *Ha a_1 és a_2 valós számok és k 2-nél nagyobb pozitív egész, akkor az*

$$a_n = \frac{a_{n-2} + (k-2)a_{n-1}}{k-1} \quad (n = 3,\ 4,\ 5,\ \ldots)$$

rekurzióval képezett (a_n) sorozat konvergens, és a határértéke:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1 + (k-1)a_2}{k}.$$

Hausel Tamás

(Budapest, Fazekas M. Gimn., III. o. t.)