A KöMaL 2697. sz. feladatára nem érkezett be egyetlen helyes megoldás sem. Ennek fő oka az volt, hogy a beküldők azt a feltételt, hogy egy gráfot önmagába képezünk, úgy értelmezték, hogy a leképezés önmagára történik, azaz minden csúcs fellép valamelyik csúcs képeként (noha ezek különbözőségére már az elsős gimnáziumi tankönyv is felhívja a figyelmet). Ilyen félreértések elkerülése végett néhány alapvető fogalmat szeretnénk tisztázni.

Emellett néhány ekvivalens fogalmat és elemi tételecskét is megmutatunk, hogy az olvasó egy-egy fogalom más-más oldalával is találkozhasson.

I. Relációk

Reláción halmazok elemei közötti *kapcsolatot* értünk. Egészen általánosan adva van két halmaz A és B; és bizonyos A-beli elemek állnak kapcsolatban valamilyen B-beli elemekkel. Ezt a kapcsolatot rendszerint valamilyen módon leírjuk. Arra nincs lehetőségünk, hogy *minden lehetséges* kapcsolatot valamilyen utasítással adjunk meg. Azt viszont megtehetjük, hogy *felsoroljuk* azokat a párokat, amelyekre a kapcsolat fennáll. Akkor is megtehetjük ezt, ha a tényleges felsorolás nem keresztülvihető.

Az összes szóba jövő párok halmazát $A \times B$ jelöli; ez a halmaz mindazon $(a,\, b)$ párokból áll, amelyekre $a \in A$ és $b \in B$ teljesül. Egy relációt tehát úgy tekinthetünk, mint az $A \times B$ halmaz valamely R részhalmazát.

Az A-beli a és a B-beli b elemek pontosan akkor vannak R relációban, ha $(a,\, b) \in R$.

(Ezt a kapcsolatot sokszor aRB-vel is jelöljük. Például az $A = B$ esetben az „egyenlőség” relációt úgy definiáljuk, hogy két elem pontosan akkor áll egymással e relációban, ha megegyezik. Ha a relációt, mint az $A \times A$ részhalmazát az $=$ jel jelöli, akkor a és b egyenlőségét $(a,\, b) \in =$ helyett $a = b$ jelöli.)

A relációkból kiindulva két úton megyünk tovább. Először olyan relációkat nézünk, ahol a két halmaz megegyezik; majd az általános fogalmat úgy szűkítjük le, hogy a függvény fogalmához jussunk.

II. Irányított gráfok

Nézzük most azt az esetet, amikor a B halmaz megegyezik az A-val. Ekkor az $A \times A$ valamely R részhalmazáról van szó, és azt mondjuk, hogy R egy reláció az A-n (vagy az A egy relációja).

Ha R egy reláció az A-n, akkor $(A,\, R)$-t egy irányított (egyszerű) gráfnak nevezzük.

Ez már „gráfelméleti nézőpont”; ezért elmondjuk az itt használatos elnevezéseket. Az A elemei a gráf csúcsai, vagy csúcspontjai, vagy szögpontjai. Az R elemei (irányított) élek. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy ha (a, b) R-beli, akkor egy „nyilat” húzunk az a csúcstól a b csúcsig. A gráf elnevezésében erre utal az „irányított” szó; míg az „egyszerű” azt fejezi ki, hogy az a-ból a b-be egyetlen nyilat rajzolunk. Ha $(a,\, b)$ R-beli, akkor azt mondjuk, hogy az a csúcsban hurok van.

III. Irányítatlan gráfok

Az A halmazon adott R relációt szimmetrikusnak nevezzük, ha valahányszor $(a,\, b)$ eleme R-nek, mindannyiszor $(b,\, a)$ is R-hez tartozik.

Ha R egy szimmetrikus reláció az A-n, akkor $(A,\, R)$ neve (irányítatlan) gráf.

A szimmetria miatt, ha $(a,\, b)$ R-beli, akkor úgy képzelhetjük, hogy a köztük levő nyílnak „két feje van”, mind az a, mind a b irányában. Éppen ezért ezeket a fejeket el is hagyhatjuk, hiszen nem kell az irányokat megkülönböztetni. (Megemlítjük, hogy a hurok minden esetben irányítatlan élnek tekinthető.)

IV. Rendezés

E címszó alatt a „kisebb vagy egyenlő” fogalmát szeretnénk megfogalmazni. Ehhez a relációk három tulajdonságára van szükségünk.

Az A halmazon értelmezett R relációt *reflexív*-nek nevezzük, ha bármely A-beli a esetén $(a,\, a)$ R-beli.

Az R reláció *tranzitív*, ha valahányszor $(a,\, b)$ és (b, c) R-beliek, mindannyiszor $(a,\, c)$ is R-ben van.

Az R reláció *antiszimmetrikus*, ha $(a,\, b)$ és $(b,\, a)$ csak akkor lehet R-beli, ha $a = b$.

(Jegyezzük meg, hogy nem tettük itt fel azt, hogy $(a,\, a)$ feltétlenül R-beli.)

Egy R reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív reláció neve: részben-rendezés.

Részben-rendezést alkotnak például a természetes számok az oszthatóságra mint relációra nézve: Minden szám osztható önmagával (reflexív), ha a osztója b-nek és b osztója c-nek, akkor a is osztója c-nek (tranzitív), végül pedig ha a és b mindegyike osztója a másiknak, akkor biztosan egyenlőek (antiszimmetria).

Ez a reláció nem olyan, mint a számok „sorbarakása”, mert itt összehasonlíthatatlan elemek is vannak; pl. 2 és 3 egyike sem osztója a másiknak. Ha az összehasonlíthatóságot is megköveteljük, akkor kapjuk a rendezést (vagy elrendezést).

Az A halmazon értelmezett R részbenrendezést rendezésnek nevezzük, ha bármely A-beli a és b elemek esetén (a, b) és (b, a) valamelyike R-ben van.

Természetesen ilyen rendezés az egész, racionális stb. számoknak a nagyság szerinti összerakása.

(Megjegyezzük, hogy sok esetben a rendezést úgy definiálják, hogy azzal ne a „kisebb-egyenlő”, hanem a „kisebb” fogalmát írják le. Ez a reláció „irreflexív”, és az antiszimmetriát is másképpen kell megfogalmazni.)

V. Ekvivalencia reláció

Ez a reláció az „ugyanúgy viselkedést" fogalmazza meg.

Az A halmazon értelmezett reflexív, szimmetrikus és tranzitív R relációt ekvivalencia-relációnak nevezzük.

Ilyen reláció például a sík háromszögein az egybevágóság. Ilyen reláció a sík egyenesei között a párhuzamosság (az egymással párhuzamos egyeneseknek „közös tulajdonsága" az irányuk). Ilyen R relációt kaphatunk például az egész számokon, ha azt mondjuk, hogy (a, b) legyen R-beli, ha $a - b$ osztható 5-tel (5 helyett bármely más egész szám megfelelne).

Az ekvivalencia-relációknak a függvényekkel való kapcsolatára még visszatérünk.

VI. Függvények

A függvény fogalmának *pontos* definiálása igen körülményes volna; de ez nem is feltétlenül szükséges. Azt kell viszont megérteni, hogy mi egy függvény. Akkor beszélünk az A halmazt a B halmazba *leképező* függvényről, ha az A halmaz minden egyes eleméhez *hozzárendelünk* egy B-beli elemet. Persze a fenti magyarázat olyan szavakat tartalmaz, amelyeket értünk ugyan, de éppen úgy nincsenek definiálva, mint a függvény. Mindenesetre, a fenti eszmefuttatás arra jó, hogy indokolja: a *függvény* szó helyett ugyanebben az értelemben használhatjuk (és használjuk) a *leképezés* és a *hozzárendelés* szavakat.

Most néhány (jól ismert) elnevezést és jelölést közlünk:

Azt a tényt, hogy az f függvény az A halmazt képezi le a B halmazba, úgy jelöljük, hogy

$$f:\ A \to B$$

Az A halmaz az f *értelmezési tartománya.* B-t szokták az f *értékkészletének* nevezni, ez azonban azt a félreértést sugallja, hogy B pontosan az f értékeiből áll. Ennek elkerülése végett mi B-t az f *képtartományának* fogjuk hívni.

Ha $a \in A$, akkor azt a B-beli elemet, amelyre f az a elemet képezi, $f(a)$ jelöli. Ha $b = f(a)$, akkor ezt a tényt úgy is jelöljük, hogy

$$f:\ a \mapsto b.$$

(Vegyük észre, hogy itt a nyílnak egy „talpa" is van. Ez azt mutatja, hogy a függvény a nyíl bal oldalán álló elemet a jobb oldali elemre képezi le.)

Az alábbiakban a függvény fogalmát kissé elbonyolítjuk avégett, hogy lehetőségünk nyíljon a „precízkedés"-re.

Az $f:\ A \to B$ függvény azzal van megadva, ha megmondjuk minden egyes A-beli elemnek a képét. Más szóval fel kell sorolni az összes $(a,\ f(a))$ párokat. Ilyen párok halmaza viszont nem más, mint egy reláció az A és B halmazok között. Ha ezt a relációt $R(f)$-fel jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy az $A \times B$ halmaz $R(f)$ részhalmazának elemei éppen az $(a,\ f(a))$ alakú párok.

Hogyan ismerhető fel, hogy ez a reláció egy függvényt ad? Úgy, hogy a párok első eleme egyértelműen meghatározza a második elemét. Ez módot ad arra, hogy a függvényt a relációk segítségével definiálhassuk:

Az $A \times B$ egy R részhalmazát akkor nevezzük az A-t B-be képező függvénynek, ha $(a,\ u)$, $(a,\ v) \in R$-ből $u = v$ következik. (Ez csak egy definiálási *lehetőség,* mi valójában *tudjuk,* mi a függvény).

Most a függvények néhány speciális fajtájával ismerkedünk meg:

I. Szürjektív függvény. Az $f:\ A \to B$ függvény értékei, tehát az $f(a)$ elemek a B-ben vannak. Az azonban nem feltétlenül igaz, hogy minden B-beli elem ilyen alakú volna. (Legyen például $A = B$ a pozitív egészek halmaza, és $f(i) = i + 1$. Ez esetben az 1 szám B-ben van, de nem írható $f(i)$ alakban.) A B $f(a)$ alakú elemeinek a halmazát az f *értékkészletének* nevezzük.

Az f függvényt szürjektívnek nevezzük, ha értékkészlete megegyezik képtartományával.

Ez az az eset, amikor a függvény a képtartományba képez le.

2. Injektív függvény. Ez a fogalom a szürjektivitás „duálisa". Egy függvényt akkor nevezünk injektívnek, ha különböző elemek képe is különböző. Az előbbi $f: i \mapsto i + 1$ függvény például injektív. Nem injektív azonban az a pozitív egészeken értelmezett g függvény, amelyre $g(i) = i - 1$, ha $i > 1$, és $g(1) = 1$. (Viszont g nyilván szürjektív.)

A g függvényt injektívnek nevezzük, ha $g(a) = g(b)$ esetén $a = b$ is fennáll.

Természetesen vannak olyan függvények, amelyek nem szürjektívek és nem is injektívek. Képezzük például a pozitív egészek halmazát önmagába úgy, hogy minden egész szám képe legyen a 3. Nem ennyire triviális az a h függvény, amelyre $h(2i) = 2i - 1$ és $h(2i + 1) = 2i + 1$.

Az előzőekben olyan függvényeket láttunk, amelyek a pozitív egészek halmazát önmagába képezték le; egyikük injektív volt, de nem szürjektív; másikuk szürjektív volt, de nem injektív. Ez véges halmazok esetén nem lehetséges.

Tétel: *Legyen A véges halmaz. Az $f:\ A \to A$ függvény pontosan akkor injektív, ha szürjektív.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy A-nak n darab eleme van. Nem megy az általánosság rovására, ha feltesszük, hogy az A elemei éppen az $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ természetes számok. Az f függvény értékei az $f(1),\ f(2),\ \ldots,\ f(n)$ számok. Ezeknek a száma legfeljebb n; mert nem feltétlen különbözőek. Az f függvény injektivitása pontosan azt jelenti, hogy a kapott függvényértékek mind különbözőek – tehát számuk n. Ez viszont éppen azt jelenti, hogy az A halmaz n eleméből n darab függvényérték, azaz mindegyik– vagyis a függvény szürjektív.

A fenti függvénytípusoknak szoros kapcsolata van az egyenletek megoldhatóságával. Az f szürjektivitása azt mondja, hogy B minden b eleme előfordul képként; vagyis az $f(x) = b$ egyenlet mindig megoldható. A g injektivitása azt jelenti, hogy különböző elemek képe is különböző, azaz amennyiben a $g(x) = b$ egyenletnek van megoldása, akkor ez a megoldás egyértelmű.

3. Bijektív függvény. Ez a fenti két függvénytípus egyesítése:

Az f függvényt akkor nevezzük bijektívnek (kölcsönösen egyértelműnek), ha injektív és szűrjektív.

4. Függvények kompozíciója.

Az $f: A \to B$ és $g: B \to C$ függvények kompozícióján azt a $gf: A \to C$ függvényt értjük, amelyre $gf: a \mapsto g(f(a))$, minden $a \in A$ esetén.

Vegyük észre, hogy az f és a g sorrendje nagyon fontos (ha C és A különbözőek, akkor nincs is értelme annak, hogy fg). Így a kompozíció mint függvények közötti művelet nem is lehet kommutatív.

*

Feladat: *Mutassuk meg, hogy a kompozíció mint függvények közötti művelet asszociatív (ha elvégezhető).*

*

Minden egyes halmazon külön-külön értelmezhető egy triviálisnak tűnő, de nagyon fontos függvény:

Az A halmaz identitásfüggvényének nevezzük azt az $i_A: A \to A$ függvényt, amelyre minden A-beli a esetén $i_A: a \mapsto a$.

Tétel: Ha $f: A \to B$ és $g: C \to A$ tetszőleges függvények, akkor $fi_A = f$ és $i_A g = g$.

Bizonyítás Tetszőleges A-beli a-ra $fi_A(a) = f(i_A(a)) = f(a)$; és tetszőleges C-beli c-re $i_A g(c) = i_A(g(c)) = g(c)$. (Megjegyezzük, hogy ez a tulajdonsága csak az identitásfüggvényeknek van meg. Ez azt jelenti, hogy az identitás-függvények jellemezhetők a függvénykompozíció segítségével; anélkül, hogy megmondanánk, mi az identitás-függvény definíciója.)

Az identitásfüggvények segítségével jellemezhetőek az injektív, szürjektív és bijektív függvények is. Ehhez azonban mindenekelőtt szükség van három elnevezésre:

Ha az f függvényhez található olyan g függvény, amelyre gf identitásfüggvény, akkor g-t az f egy bal inverzének nevezzük; ha olyan h függvény található, amelyre fh identitásfüggvény, akkor h az f egy jobb inverze; amennyiben olyan k függvényt találunk, amelyre mind fk mind kf identitás, akkor azt mondjuk, hogy k az f (egy) inverze.

Megjegyezzük, hogy sem a bal inverz, sem a jobb inverz nem egyértelmű, de az inverz igen.

Legyen pl. A a valós számok, B pedig az egész számok halmaza. Jelölje f azt az $A \to B$ függvényt, amelyre $f(a) = [a]$ (az a egész része). Ha $0 \leqq r < 1$, és a $g_r: B \to A$ függvényre $g_r(b) = b + r$, akkor tetszőleges B-beli b-re $fg_r(b) = f(g_r(b)) = f(b + r) = [b + r] = b$, tehát $fg_r = i_B$; azaz minden ilyen g_r jobb inverze az f-nek. Legyen $h: B \to B$ az a függvény, melyre $h(b) = 8 \cdot b$. Tetszőleges, 8-nál kisebb nemnegatív n egész számmal értelmezzük a $K_n: B \to B$ függvényeket a következőképpen : $K_n(b) = \left[\dfrac{b+n}{8}\right]$. Ha $b \in B$, akkor $K_n h(b) = K_n(8b) = \left[b + \dfrac{n}{8}\right] = b$, tehát a $K_0, K_1, \ldots, K_7$ függvények valamennyien bal inverzei h-nak.

*

Feladat: *Igazoljuk, hogy $K_0, K_1, \ldots, K_7$ páronként különböző függvények. Mutassuk meg továbbá, hogy ezeken kívül h-nak még végtelen sok bal inverze van.*

*

Tétel: *Az f függvénynek pontosan akkor van bal inverze, ha injektív; pontosan akkor van jobb inverze, ha szürjektív; és pontosan akkor van inverze, ha bijektív.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $f: A \to B$ injektív, és definiáljuk a g függvényt a következőképpen: $g(f(a)) = a$, a B minden $f(a)$ alakú elemére; és definiáljuk akárhogyan a B összes többi elemére. Az f injektivitása következtében ezzel egy függvényt definiáltunk, amire $gf(a) = g(f(a)) = a = i_A(a)$; azaz $gf = i_A$.

Legyen most $f: A \to B$ szürjektív. Ez azt jelenti, hogy minden B-beli b előáll $f(a)$ alakban. Válasszunk ki tehát minden egyes b elemhez olyan a-t, amelyre $f(a) = b$; és legyen h az a függvény, amely az adott b-hez pontosan ezt az a-t rendeli. Az f szürjektivitása miatt egy függvényt értelmeztünk; erre a függvényre $fh(b) = fh(f(a)) = f(h(f(a))) = f(a) = b = i_B(b)$ teljesül, és így $fh = i_B$.

Ha f bijektív, akkor a fent definiált két függvény megegyezik; és így f-nek létezik inverze.

Az állítás megfordításánál is három eset van, amelyek közül az első kettő együtt bizonyítható. Azt kell megmutatni ugyanis, hogy ha gf identitás, akkor f injektív, és ha fh identitás, akkor f szürjektív. Ezt úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha egy kéttényezős kompozíció identitás, akkor az első tényező szürjektív, a második pedig injektív.

Legyen tehát $gf = i_A$. Ha f az A halmazt a B-be képezi le, akkor g természetesen a B-t képezi le A-ba.

Tegyük fel, hogy $f(u) = f(v)$. Ekkor

$$u = i_A(u) = gf(u) = g(f(u)) = g((f(v)) = gf(v) = i_A(v) = v;$$

tehát f injektív.

Továbbá tetszőleges A-beli a-ra $g(f(a)) = gf(a) = i_A(a) = a$, vagyis g, szürjektív.

Azt kell megmutatni, hogy ha f-nek van inverze, akkor f bijektív. Ez viszont világos, hiszen ha van inverze, akkor van bal inverze is és jobb inverze is; így a már bizonyítottak alapján injektív is és szürjektív is.

Most megmutatunk egy érdekes tényt:

Tétel: *Ha az f függvénynek van bal inverze és jobb inverze is, akkor csak egyetlen bal inverze és csak egyetlen jobb inverze van; és ezek is megegyeznek.*

Bizonyítás: Legyen $f:\ A \to B$ és g tetszőleges bal inverz, h tetszőleges jobb inverz. Ez azt jelenti, hogy $gf = i_A$ és $fh = i_B$. Ebből azonnal következik, hogy g is és h is B-t képezi le A-ba. Így $i_A h = h$ és $g i_B = g$. Ezt felhasználva (az asszociativitás alapján) a következőket kapjuk:

$$g = g i_B = g(fh) = (gf)h = i_A h = h,$$

ami bizonyítja állításunkat.

Végezetül megadjuk, hogy milyen kapcsolatban vannak a függvények az ekvivalencia-relációkkal:

Tétel:

„$(u,\ v) \in R \subseteq A \times A$ akkor és csak akkor, ha $f(u) = f(v)$” ekvivalenciareláció.*Ha $f:\ A \to B$ tetszőleges függvény, akkor a következő reláció:*

„$(u,\ v) \in R \subseteq A \times A$ akkor és csak akkor, ha $f(u) = f(v)$” ekvivalenciareláció.

Bizonyítás: *$f(u) = f(v)$ bizonyítja a reflexivitást. A szimmetria a reláció szimmetrikus definíciójából következik. Ha $f(u) = f(v)$ és $f(v) = f(w)$, akkor természetesen $f(u) = f(w)$, ami bizonyítja a reláció tranzitivitását.*

(Megjegyezzük, hogy minden ekvivalenciarelációhoz található olyan függvény, amelyből az ekvivalenciarelációt a fenti módon kaphatjuk.)

VII. Morfizmusok

Az eddigiekben azt tettük fel, hogy A és B tetszőleges halmazok, és $f:\ A \to B$ valamilyen függvény. A matematikában azonban általában valamilyen „struktúra” is adott e halmazokon. Mi most csak arra gondolunk, hogy e halmazokon valamilyen művelet vagy reláció van adva. (Például mindegyikük egy számhalmaz, amelyben elvégezhető az összeadás, vagy mindketten irányított gráfok.)

Ilyen esetekben fontosak azok a függvények, amelyek a struktúrát megtartják. Ezeket a függvényeket homomorfizmusoknak nevezzük. Ha például összeadásról van szó, akkor a feltétel azt mondja, hogy $w = u+v$ esetén $f(w) = f(u)+f(v)$. Gráfok esetén a feltétel úgy szól, hogy ha u-ból megy nyíl v-be, akkor $f(u)$-ból is megy nyíl $f(v)$-be.

A homomorfizmusok esetén is használjuk a függvényeknél elmondott neveket; így beszélünk injektív, szürjektív és bijektív homomorfizmusokról. Van azonban két fontos speciális eset is, amelyeknek külön nevük van;

Az $f:\ A \to A$ morfizmust endomorfizmusnak nevezzük; amennyiben pedig ez bijekció, akkor a neve automorfizmus.

Így a 2697. feladatnál azt kellett bizonyítani, hogy a mondott gráfnak egyetlen endomorfizmusa az identitás. (Az identitás nyilván mindig homomorfizmus.)

Végezetül egy érdekes dolgot említünk meg. A bijektív függvényekről beláttuk, hogy azoknak van inverzük. Morfizmusok esetében az a probléma, hogy ez az inverz vajon maga is morfizmus-e. Ha a struktúrában csak műveletek vannak, akkor be lehet bizonyítani, hogy ez így van. Mutatunk viszont egy példát, hogy gráfokra az inverz nem mindig morfizmus.

Legyen A az egészek halmaza; és az R reláció álljon azokból az $(i,\ i+1)$ párokból, amelyekre i pozitív. Az $f:\ A \to A$ függvényre legyen $f(i) = i+1$. Világos, hogy f morfizmus. Az is világos, hogy az f-nek a g inverzére $g(i) = i-1$ (egy ilyen van, mivel tudjuk, hogy az inverz egyértelmű). Ezzel szemben nem tartja meg a relációt, hiszen $(1,\ 2)$ relációban van, míg g-t alkalmazva a kapott $(0,\ 1)$ nincsen.