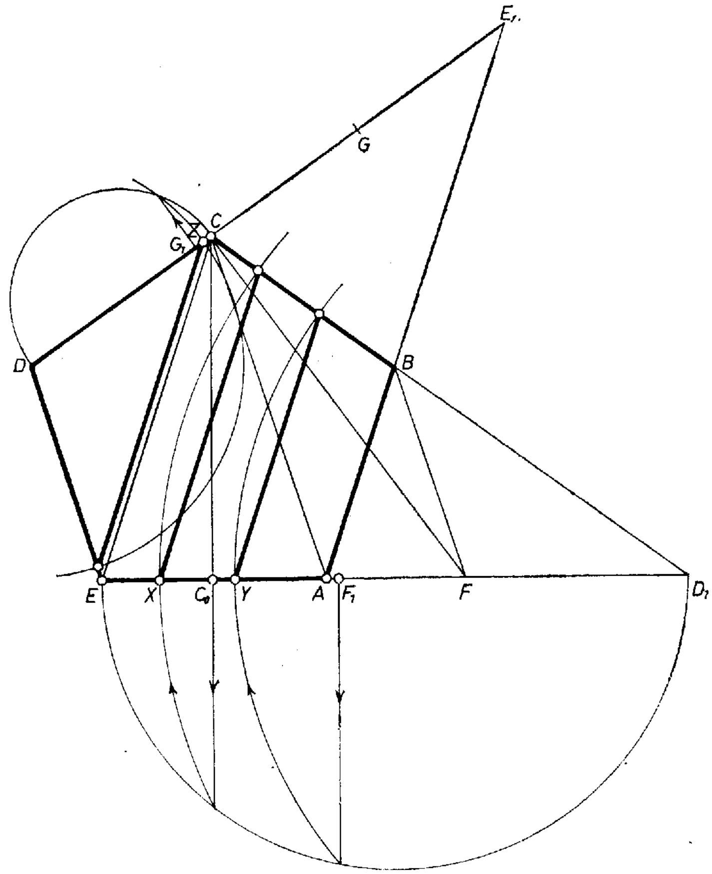
Jelöljük az ötszög csúcsait A, B, C, D, E-vel, az ötszög területét T-vel, és keressük az AB-vel párhuzamos területnegyedelőket. Legyen C_0 a C csúcs AE-en levő vetülete, CC_0 felezi az ötszög területét, hiszen szimmetriatengelye. Emiatt az $ABCE$ trapéz területe nagyobb $T/2$-nél, a területfelező ebben a trapézban halad. Jelöljük a BC, AE egyenesek metszéspontját D_1-gyel, és vegyük hozzá az $ABCC_0$ négyszöghöz az ABD_1 háromszöget, kapjuk a CC_0D_1 derékszögű háromszöget. Ha sikerül olyan, ezzel egyenlő területű, egyenlő szárú háromszöget szerkesztenünk, amelyiknek a szárai az AD_1, BD_1 egyenesek, meg is van a területfelező egyenes. Valóban, ha ebből az egyenlő szárú háromszögből elvesszük az ABD_1, háromszöget, a visszamaradó trapéz területe épp $T/2$ lesz, hiszen egyenlő $ABCC_0$ területével.



Jelöljük a területfelező egyenes AE-vel alkotott metszéspontját X-szel.

A mondott egyenlő szárú háromszög területe egyrészt $\frac{1}{2}D_1X^2$ sin 36°, másrészt $\frac{1}{2}C_0D_1 \cdot CD_1 \cdot \sin 36°$, tehát a D_1X szakasz egyenlő a D_1C, D_1C_0 szakaszok mértani közepével. A szokásos eljárást követve rajzoljunk ED_1 fölé Thalész-kört, ennek a CC_0 egyenesen levő pontját forgassuk le D_1 körül a D_1E egyenesre, kapjuk X-et.

Jelöljük a most megszerkesztett trapéz területét felező, AB-vel párhuzamos egyenes AE-n levő pontját Y-nal: ez határozza meg az ötszög egyik keresett területnegyedelőjét. Az egyszer már alkalmazott gondolatmenetet követve először olyan háromszöget keresünk, amelynek oldalai az ED_1, CD_1 egyenesek, és amelyiknek területe egyenlő $T/4$-nek és az ABD_1 háromszög területének az összegével. Ehhez csak el kell vennünk C_0CD_1-ből egy $T/4$ területű darabot. Húzzunk párhuzamost B-n át AC-vel, és messe ez AD_1-et F-ben. Az ABC, AFC háromszögek területe egyenlő, tehát CC_0F területe egyenlő $ABCC_0$ területével, vagyis $T/2$-vel. Legyen a C_0F szakasz felezőpontja F_1, ekkor CF_1D_1 a keresett háromszög, és D_1Y egyenlő D_1C és D_1F_1 mértani közepével. Y-t tehát megkapjuk, ha az imént használt Thalész-kör F_1 feletti pontját D_1 körül leforgatjuk ED_1-re.

A harmadik egyenes a CDE háromszöget vágja ketté, hiszen (mint azt hamarosan belátjuk), CE a C_0CDE idomot úgy vágja ketté, hogy a keletkezett darabok közül CDE a nagyobb területű. Jelöljük ennek a területnegyedelőnek CD-n levő pontját Z-vel. Most a DE, DC szárakra fogunk $T/4$ területű háromszöget helyezni. Tükrözzük E-t BC-re, kapjuk E_1-et. Könnyen igazolhatjuk, hogy az A, B, E_1 pontok, valamint a C, D, E_1 pontok egy egyenesen vannak. A BE_1CE rombusznak BCE is, CEE_1 is fele, ezek tehát egyenlő területűek. Jelöljük CE_1 felezőpontját G-vel, CEG területe egyenlő CC_0E területével, tehát DEG területe $T/2$. Legyen DG felezőpontja G_1, a keresett DZ szakasz DG_1 és DC mértani közepe, hiszen DEG_1 területe $T/4$. Ezek szerint a CD feletti Thalész-kör G_1 feletti pontját kell D körül CD-re leforgatnunk, kapjuk Z-t.

Be kell még látnunk, hogy az így megszerkesztett Z valóban a CD szakaszon van. Elég belátnunk, hogy $DG_1 < DC$, vagyis $DG < 2CD$, $CD > CG$, $2CD > CE_1 = CE$, és itt a legutolsó egyenlőtlenség nem más, mint a CDE háromszögre vonatkozó $CE < CD + DE$ háromszög-egyenlőtlenség.

Megjegyzések. 1. Ha az ötszög oldalát választjuk egységnek, és az átló hosszát a-val jelöljük, akkor megoldásunk szerint

$$D_1X^2 = (1+a)\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}a+a^2.$$

Az ABD_1, ECD_1 háromszögek hasonlósága alapján

$$1 : a = a : (1+a),$$

tehát $a^2 = 1+a$, $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, és

$$D_1X^2 = \frac{3}{2}+\frac{5}{2}a = \frac{11+5\sqrt{5}}{4},$$

$$AX = \frac{\sqrt{11+5\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{2} = 0{,}74.$$

Mivel

$$AF : AD_1 = CB : CD_1, \quad AF = \frac{a}{a+1} = a-1, \quad FD_1 = 1, \quad F_1D_1 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+a\right),$$

és így

$$D_1Y^2 = (1+a)\frac{2a+3}{4} = \frac{2a^2+5a+3}{4} = \frac{7a+5}{4} = \frac{17+7\sqrt{5}}{8}.$$

$$AY = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{34+14\sqrt{5}}-(\sqrt{5}+1)}{2} = 0{,}40.$$

Végül

$$DG_1 = \frac{1}{2}DG = \frac{2+a}{4} = \frac{5+\sqrt{5}}{8},$$

$$DZ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0{,}95.$$

Természetesen ezeket a számokat a feladat követelményei alapján felírható egyenletekből is meghatározhatjuk. Ebben az esetben a kapott eredményeket azonban még valahogy meg kell szerkesztenünk.

2. Az ábra azt mutatja, hogy a területfelező egyenes közel van az ötszög centrumához. Az olvasóra bízzuk annak meggondolását, miért kell a területfelezőnek közel lennie a centrumhoz, és miért nem megy át pontosan rajta.