A feladatok megoldása a versenyzőktől származik (kivéve a 6. feladat 2. megoldását). A megoldók érzékeltetni próbálták azt is, hogy milyen úton jutottak el a megoldáshoz, milyen ötletek, meggondolások segítették munkájukat.

A 6., legnehezebb feladat második megoldását Pataki János írta le.

1. *feladat. Adott a síkban két azonos középpontú kör, melyek sugara R és r $(R>r)$. P a kisebb kör egy fix pontja, B pedig végigfut a nagyobb körön. A BP egyenes másik metszéspontja a nagyobb körrel C. A BP-re P-ben állított „l” merőleges másik metszéspontja a kisebb körrel A (ha „l” a kör érintője P-ben, legyen $A=P$).*

I. Határozzuk meg a $BC^2+CA^2+AB^2$ által felvett értékek halmazát.

II. Határozzuk meg az AB szakasz felezőpontjának mértani helyét.

(Luxemburg)

Megoldás. I. Legyen O a két kör középpontja. Tegyük fel, hogy P, O, B nincsenek egy egyenesen. Messe PB az r sugarú kört másodszor Q-ban. Mivel B és C szerepe felcserélhető, feltehetjük, hogy Q a P és B között fekszik. P-ből QA 90° alatt látszik, tehát QA átmérő. $CP=QB=a$ (hiszen pl. $CPO\triangle\simeq BQO\triangle$, két oldal és a nagyobbikkal szemközti szögben megegyezik).

1988-10-291-1.eps

1988-10-291-2.eps

A Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$AB^2+BC^2+CA^2=PA^2+(PQ+a)^2+(PQ+2a)^2+PA^2+a^2=$$
$$=2(PA^2+PQ^2)+6a(a+PQ).$$

Viszont a PQA háromszögből $PA^2+PQ^2\simeq 4r^2$, P-nek az R sugarú körre vonatkozó hatványa

$$a(a+PQ)=CP\cdot PB=R^2-r^2,$$

tehát $AB^2+BC^2+CA^2=6R^2+2r^2$ még akkor is, ha C, P, O, B egy egyenesen vannak. A vizsgált érték tehát állandó.

II. Jelöljük B-nek a PA felezőmerőlegesére való tükörképét B'-vel. B' az R sugarú körön van, mivel f mindkét körnek szimmetriatengelye. $PAB'B$ téglalap, $PB=AB'$ és $APB\sphericalangle=PAB'\sphericalangle=90^\circ$, így AB felezőpontja egybeesik PB' felezőpontjával. Ahogy B körbefut, B' is, így AB felezőpontja az R sugarú kör P-ből felére kicsinyített képén fekszik. Az extrém esetben e kör egy átmérője végpontjain.

Beke Tibor (Nagyatád, Ady E. Gimn., III. o. t.)

A feladat megfelelt annak a tradíciónak, hogy az első nap első példája a legkönnyebb a hat közül. Az ábra szinte követeli a Pitagorasz-tétel alkalmazását. A második rész is teljesen elemi, a trükk talán csak az, hogy az ember analitikus vagy vektoros megoldásra gyanakszik először, ami biztosan létezik, de nem ilyen egyszerű. Az ötlet a versenyen elég későn jutott csak eszembe.

2. *feladat. Legyen n pozitív egész szám, és legyenek A_1, A_2, $\dots$, A_{2n+1} a B halmaz részhalmazai. Tegyük fel, hogy*

a) mindegyik A_i-nek pontosan $2n$ eleme van,

b)minden $A_i\cap A_j$ metszetnek $(1\leqq i<j\leqq 2n+1)$pontosan egy eleme van,

c) a B halmaz minden eleme benne van legalább két A_i-ben.

n milyen értékeire rendelhető hozzá B minden eleméhez a 0 és 1 számok egyike úgy, hogy minden A_i-nek pontosan n olyan eleme legyen, amelyhez a 0-t rendeltünk?

(Csehszlovákia)

Megoldás. Először azt bizonyítom be, hogy a B halmaz minden eleme pontosan két A_i-ben fordul elő. A *c)* feltétel szerint minden elem legalább két A_i-ben szerepel, ezért elegendő azt megmutatni, hogy egyik elem sem fordul elő legalább három részhalmazban.

Tegyük fel, hogy X mégis eleme az A_i, A_j, A_k halmazoknak, ebből ellentmondáshoz fogunk jutni. A *b)* feltétel szerint az A_i, A_j, A_k halmazok közül semelyik kettőnek nincs az X-től különböző közös eleme. A három halmaz X-en kívüli, összesen $3\cdot(2n-1)$ eleme így mind különböző. A továbbiakban nevezzük ezeket „mókás” elemeknek.

A *c)* feltétel szerint minden mókás elem előfordul legalább egyszer a további $2n-2$ halmazban. Összesen $3\cdot(2n-1)$ mókás elem van, ezért valamelyik halmazban közülük 4 fordul elő $(3(2n-2)<3(2n-1))$. Ekkor ennek a halmaznak az A_i, A_j, A_k valamelyikével legalább 2 közös eleme van, ami ellentmond a *b)* feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy a B halmaz minden eleme pontosan két A_i-ben szerepel.

Tegyük fel ezután, hogy megadtuk a megfelelő hozzárendelést a B halmaz elemein. Mivel minden A_i-nek n eleméhez rendeltünk 0-t, ezért halmazonként leszámolva összesen a $n(2n+1)$ elemhez rendeltünk 0-t. Láttuk másfelől, hogy minden elem pontosan két halmazban fordul elő, ezért a B halmaz $\frac{n(2n+1)}{2}$ eleméhez rendeltünk 0-t. Ez pedig csak akkor egész, ha n páros, tehát szükséges feltétel, hogy n páros legyen.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ez a feltétel elégséges, ilyenkor megadható az előírt hozzárendelés. Írjuk fel egy szabályos $(2n+1)$-szög csúcsaira az $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1$ számokat. Húzzuk be azokat az átlókat, melyek két olyan csúcsot kötnek össze, melyek között legfeljebb $\frac{n}{2}-1$ csúcs van. (Ez egész, mivel n páros.) Így minden csúcsból n átlót húztunk be.

Jelöljük A_i és A_j közös elemét (i,j)-vel $(i<j)$. Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mivel minden elem pontosan két halmazban szerepel, és *b)* fennáll.

(i,j)-hez pontosan akkor rendeljünk 0-t, ha az i és j csúcs közötti átlót behúztuk. Mivel minden csúcsból n átló indul, ezért ez egy megfelelő hozzárendelés.

Tehát akkor és csak akkor végezhető el megfelelő hozzárendelés, ha az n páros.

Keleti Tamás(Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

3. *feladat. Definiáljuk az f függvényt a pozitív egészeken oly módon, hogy*

$$f(1)=1, \quad f(3)=3,$$

továbbá

$$\begin{aligned} f(2n)&=f(n)\\ f(4n+1)&=2f(2n+1)-f(n)\\ f(4n+3)&=3f(2n+1)-2f(n) \end{aligned}$$

minden pozitív egész n-re.

Határozzuk meg azon, $1 \leqq n \leqq 1988$-nak eleget tevő egész n-nek számát, amelyekre $f(n)=n$ teljesül.

(Anglia)

Megjegyzés. Ez tipikusan olyan feladat, amelynek a megoldásához egy ötlet kell. A megfelelő ötlet hiányában a megoldás szinte reménytelen.

A függvény definíciója alapján könnyű az első néhány értéket kiszámolni. A versenyen többen kiszámolták az első 50–60 értéket, de abból nem sok szabályosság látszott. Néhány részeredményünk:

– $f(2^k \pm 1)=2^k \pm 1$
– $f(3.2^k \pm 3)=3.2^k \pm 3$ (sejtés)
– $f(f(x))$, ha x páratlan (sejtés)
– 2-hatványok osztási maradékát érdemes megvizsgálni.

Ezek után lássuk a Megoldást!

Megoldás. Vegyük észre, hogy ha n kettes számrendszerbeli jegyeit visszafele olvassuk (jobbról balra), akkor $f(n)$-et kapjuk! Ezt az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilván:

$$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=3,\ f(4)=1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás $(n-1)$-ig igaz, és bizonyítsuk n-re.
a) $n=2k$ esetén legyen $f(k)=z$.

$$f(n)=f(2k)=f(k)=z.$$

b) Ha $n=4k+1$, legyen $2^{t-1} \leqq k < 2^t$, és $f(k)=z$,

$$f(n)=2f(2k+1)-f(k)=2\cdot(2^{t+1}+z)-z=2^{t+2}+z.$$

c) Ha $n=4k+3$, legyen $2^{t-1} \leqq k < 2^t$, és $f(k)=z$,

$$f(n)=3f(2k+1)-2f(k)=3\cdot(2^{t+1}+z)-2z=3\cdot 2^{t+1}+z.$$

A feladat megoldásait tehát azok az 1 és 1988 közé eső számok adják, melyeket ha kettes számrendszerben írunk fel, visszafele olvasva ugyanazt kapjuk. Ezeket hívjuk *palindrom* számoknak. Számoljuk össze őket.

A kettes számrendszerben $2n$ jegyű palindrom 2^{n-1} van, mert az első számjegy 1, a másodiktól az n-edik helyig állhat 0 vagy 1, ez 2^{n-1} lehetőség, és az utolsó n jegy egyértelműen meghatározott.

Hasonló okból $2n+1$ jegyű palindrom 2^n db van.

1988 a kettes számrendszerben: 11111000100 (11 jegyű). Ennél a legfeljebb 10 jegyű palindromok mind kisebbek. Ezek száma 62. Az 1988 a 11 jegyű palindromok közül az $1967 = 11110101111$ és $2015 = 11111011111$ közé esik, ezért az 1988-nál kisebb 11 jegyű palindromok száma 30.

Összesen tehát a feladatnak 92 db megoldása van.

Csirik János (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)

4. *feladat. Bizonyítsuk be, hogy*

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqq \frac{5}{4}$$

egyenlőtlenségnek eleget tevő valós számok halmaza diszjunkt intervallumok egyesítése, melyek összhossza 1988.

(Írország)

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}; \quad I_0 = (-\infty,\ 1), \quad I_1 = (1,\ 2), \quad I_2 = (2,\ 3),\ \ldots$$
$$\ldots,\quad I_i(i,\ i+1),\quad \ldots,\quad I_{69} = (69,\ 70),\quad I_{70} = (70,\ +\infty).$$

Az $f(x)$ értelmezési tartománya $I_0 \cup I_1 \cup \ldots \cup I_{70}$, mivel $f(x)$ az $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 70$ értékek kivételével nyilván mindenütt értelmes. $f(x)$ az értelmezési tartományában folytonos, mert folytonos függvények összegeként áll elő.

1988-10-294-1.eps

Az egyes intervallumokban $f(x)$ szigorúan monoton csökken, hiszen szigorúan monoton csökkenő függvények $\left(\frac{1}{x-1},\ \frac{2}{x-2},\ \ldots,\ \frac{70}{x-70}\right)$ összegeként áll elő.

I_0-ban a függvény csak negatív értékeket vesz fel, az $\frac{1}{x-1},\ \frac{2}{x-2},\ \ldots,\ \frac{70}{x-70}$ törtek mindegyike negatív ebben az intervallumban.

Az $I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_{69}$ intervallumban $f(x)$ minden valós értéket felvesz, az egyes intervallumokon belül $f(x)$ folytonos, másrészt, mint azt látni fogjuk, az intervallumok bal oldalán $f(x)$ jobb oldali határértéke $+\infty$; az intervallumok jobb oldalán $f(x)$ bal oldali határértéke $-\infty$. Ezt a következő módon láthatjuk be: legyen „a” az 1, 2, 3, ..., 70 egészek bármelyike. Ekkor

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \sum_{k=1}^{70} \lim_{x\to a+0} \frac{k}{x-k} = +\infty,$$

$k = a$ esetén

$$\lim_{x\to a+0} \frac{k}{x-k} = \lim_{x\to a+0} \frac{a}{x-a} = +\infty,$$

minden más esetben $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{k}{x-k}$ véges. Hasonlóképpen igaz, hogy $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$.

Már láttuk, hogy $f(x)$-nek az $x = 70$ helyen vett jobb oldali határértéke $+\infty$. Másrészt igaz az is, hogy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, hiszen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sum\limits_{k=1}^{70} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{k}{x-k} = \sum\limits_{k=1}^{70} 0 = 0$. Így az I_{70} intervallumban a függvény minden pozitív értéket felvesz.

A függvény menete tehát a következő (vázlatosan):

Az $f(x) = \frac{5}{4}$ egyenletnek tehát az I_0 intervallum kivételével mindegyik intervallumban van megoldása, a szigorú monotonitás miatt minden intervallumban pontosan egy. A gyökök legyenek rendre $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{70}$. Ekkor $1 < x_1 < 2 < x_2 < 3 < \ldots < 70 < x_{70}$.

Az $f(x) \geqq \frac{5}{4}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza ekkor nyilván az $(1,\ x_1] \cup (2,\ x_2] \cup \ldots \cup (70,\ x_0]$ halmaz. Ezek valóban diszjunkt intervallumok, összhosszuk:

$$S = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \ldots + (x_{70} - 70) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{70}) - (1 + 2 + \ldots + 70)$$

Hozzuk közös nevezőre a

$$-\frac{5}{4}+f(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\ldots+\frac{70}{x-70}-\frac{5}{4}$$

összeget.

$$-\frac{5}{4}+f(x)=\frac{1\cdot(x-2)(x-3)\ldots(x-70)+2\cdot(x-1)(x-3)\cdot\ldots\cdot(x-70)}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)}+$$
$$+\ldots+\frac{70(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-69)}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)}-\frac{\frac{5}{4}(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)}{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-70)};$$

(A két sor egyetlen törtnek tekintendő.) A számláló egy 70-ed fokú polinom, főegyütthatója $a_{70}=-\frac{5}{4}$. A 69-ed fokú tag együtthatója:

$$a_{69}=1+2+\ldots+70+\frac{5}{4}(1+2+\ldots+70)=\frac{9}{4}(1+2+\ldots+70).$$

Másrészt az $f(x)=\frac{5}{4}$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $f(x)-\frac{5}{4}$ tört számlálója 0, így az $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{70}$ gyökök megegyeznek a fenti tört számlálójában szereplő polinom gyökeivel, így összegük is megegyezik. A Vieta-formula [1]szerint

$$x_1+x_2+\ldots+x_{70}=\frac{-a_{69}}{a_{70}}=\frac{-\frac{9}{4}(1+2+\ldots70)}{-\frac{5}{4}}=\frac{9}{5}(1+2+\ldots70).$$

Az intervallumok összhossza tehát:

$$S=\frac{9}{5}(1+2+\ldots+70)-(1+2+\ldots+70)=\frac{4}{5}(1+2+\ldots+70)=$$
$$=\frac{4}{5}\cdot71\cdot70\cdot\frac{1}{2}=2\cdot71\cdot14=1988,$$

és ezt kellett bizonyítani.

Drasny Gábor(Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

5. *feladat. A derékszögű ABC háromszög A csúcsából a BC átfogóhoz vezető magasságvonal talppontja D. Az ABD és ACD háromszögek beírt köreinek középpontját összekötő egyenes az AB, ill. AC befogókat K-ban, ill. L-ben metszi. Jelölje S, ill. T az ABC, ill. AKL háromszög területét. Bizonyítsuk be, hogy $S\geqq 2T$.*

(Görögország)

Megoldás. Legyen a beírt körök középpontja O_1, ill. O_2 (lásd ábra).

1988-10-296-1.eps

Az ábra azt a sejtést sugallja, hogy az AKL egyenlő szárú derékszögű háromszög. (A versenyen úgy emlékeztem, mintha ez éppen egy KÖMAL feladat lett volna, noha csak ehhez hasonló volt a Gy. 2395., 37. évf. 7. szám, 310. o.). Semmi elképzelésem nem volt, hogy ha be tudnám ezt bizonyítani, akkor miért segítene, de más nem jutott eszembe, így megpróbáltam igazolni. Azaz feltettem, hogy $AK=AL$. Ebből $ALO_2\sphericalangle=45^\circ=O_2DC\sphericalangle$, ekkor (és csak ekkor!) $DCLO_2$ húrnégyszög! $DCLO_2$ húrnégyszög pl. akkor, ha $LCD\sphericalangle=O_1O_2D\sphericalangle$! Ennek igazolásához pedig csak azt kell

[1]Legyen az $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ komplex együtthatós polinom gyöktényezős alakja

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n);$$

az együtthatók összehasonlítása alapján adódó összefüggések:

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=-a_1,$$
$$\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3\ldots+\alpha_1\alpha_n+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_{n-1}\alpha_n=a_2,$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n=(-1)^na_n.$$

Ezeket nevezzük Viéta-formuláknak.

észrevenni, hogy az a D körüli $+90°$-os forgatvanyújtás, amely az ADC háromszöget a BDA háromszögbe viszi, nyilván O_2-nek O_1-et felelteti meg. O_1O_2D háromszög derékszögű, és a befogók aránya egyenlő az ADC háromszög befogóinak arányával, így ezek hasonlóak. Kapjuk tehát, hogy $O_1O_2D\sphericalangle = ACD\sphericalangle$. Ezzel beláttam, hogy $ALK\sphericalangle = AKL\sphericalangle = 45°$. Ezek után AO_2 és AO_1 szögfelező voltának kihasználásával az $AK = AD = AL$ egyenlőséget kaptam. (Ezt rövidebben lehet igazolni, ugyanis elegendő, ha csak az $ALO_2\sphericalangle = ADO_2\sphericalangle$ egyenlőséget vesszük észre.)

A megoldást ezek után borzasztóan el lehet bonyolítani, ahogy én is tettem. Kitértem ugyanis arra, hogy $KO_1 = O_1D$, és $DO_2 = O_2L$, így KL hossza épp a DO_1O_2 háromszög kerülete. Ezek után – észrevéve, hogy a DO_1O_2 háromszög az eredeti ABC háromszöghöz is hasonló – felírtam DO_1O_2 és ABC hasonlóságának arányát, végül ABC háromszög oldalaival kifejeztem KL hosszát, s mindebből számoltam ki T-t. Az $S \geqq 2T$ egyenlőtlenség igazolása ezek után igazán egyszerű volt. (A koordinátornak állítólag nagyon tetszett a $DO_1O_2 \,\triangle\!\sim ABC\,\triangle$ eredmény, lévén hogy ennek a feladathoz nem sok köze van.)

Nézzük most „a megoldást”! Betűzzük az oldalakat az ábra szerint. AD hossza ekkor nem más, mint $\frac{cb}{a}$. (Ez a kétszeres terület kétféle felírásából adódik: $bc = a \cdot AD$.) T-re ezek után a

$$T = \frac{c^2b^2}{2a^2}$$

eredményt kapjuk. $S \geqq 2T$ így írható:

$$2\frac{c^2b^2}{2a^2} \leqq \frac{1}{2}bc.$$

Rendezés és $a^2 = b^2 + c^2$ (Pitagorasz tétele) helyettesítés után:

$$2bc \leqq b^2 + c^2$$

Ez utóbbi pedig $(b-c)^2 \geqq 0$-val ekvivalens.

Sustik Mátyás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

6. *feladat. Legyenek a és b olyan pozitív egészek, amelyekre $ab+1$ osztója a^2+b^2-nek. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ egy egész szám négyzete.*

(NSZK)

I. megoldás. A következő megoldást sajnos nem a versenyen, hanem utána, este találtam. Ekkor már tudtam azt, hogy a végtelen leszállás elvével kijön a feladat. Erre a módszerre igazság szerint magamtól is gondolhattam volna, hiszen két hazai válogatóversenyen szükség volt rá.

Tegyük fel, hogy a $a \leqq b$. Osszuk el b-t maradékosan a-val: $b = qa + r$ (q, r egész; $0 \leqq r < a$). Ekkor

$$ab + 1 = qa^2 + ra + 1, \text{ és}$$
$$a^2 + b^2 = a^2 + q^2a^2 + 2ar + r^2.$$

A feltétel szerint $ab + 1 | a^2 + b^2$. Legyen a hányados k, azaz

$$k(qa^2 + ra + 1) = a^2 + q^2a^2 + 2qar + r^2.$$

Másrészt:

$$q(qa^2 + ra + 1) = q^2a^2 + qar + q.$$

A felső egyenletből az alsót kivonva:

$$(k-q)(qa^2 + ra + 1) = a^2 + qra + r^2 - q. \tag{1}$$

Most két esetet különböztetünk meg:

I. $r = 0$ (azaz $a|b$),

II. $r \neq 0$ (azaz $a \nmid b$).

Mind a két esetben (1) jobb oldalát fogjuk alulról és felülről úgy megbecsülni, hogy ennek, mint $(qa^2 + ra + 1)$ többszörösének, már csak egy lehetséges értéke marad.

I. eset. $r = 0$. (1) most így alakul:

$$(k-q)(qa^2 + 1) = a^2 - q.$$

Könnyen látható, hogy:

$$-(qa^2 + 1) < a^2 - q < qa^2 + 1,$$

tehát

$$a^2 - q = 0, \text{ és } k - q = 0.$$

Ez utóbbiakból: $k = a^2$, azaz valóban négyzetszám.

Látható az is, hogy az $a \mid b$ esetben csak a $b = a^3$ lehetséges, és az a, a^3 számpár kielégíti a feltételt.

II. eset. $r \neq 0$. Megmutatjuk, hogy ekkor:

$$0 < a^2 + qra + r^2 - q < 2(qa^2 + ra + 1).$$

A bal oldali egyenlőtlenség abból következik, hogy $a^2 + r^2 > 0$, és $qra - q \geqq 0$. (Itt használjuk ki, hogy $r > 0$.) A jobb oldali céljára:

$$2qa^2 > a^2 + qra, \quad (r < a)$$
$$2ra > r^2,$$
$$2 > -q,$$

ezeket összegezve megkapjuk a jobb oldali egyenlőtlenséget, és így (1)-ben csak

$$qa^2 + ra + 1 = a^2 + qra + r^2 - q \quad \text{ és } \quad k - q = 1$$

lehetséges. Átrendezve:

(2) $$a^2 + (a - r)^2 = (q + 1)(a(a - r) + 1).$$

$r < a$ miatt $a - r > 0$, így a és $(a - r)$ is pozitív egész. Az a, b számokból kiindulva találtunk egy másik számpárt, a-t és $(a - r)$-et, amelyre

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1} = \frac{(a - r)^2 + a^2}{(a - r)a + 1},$$

és ebben az új számpárban a számok minimuma, $(a-r)$ kisebb, mint az eredeti számpárban (a). Ha most $a-r|a$, akkor az I. eset szerint k négyzetszám. Ha pedig $a - r \nmid a$, akkor a II. eset szerint tovább tudjuk csökkenteni a minimumot. Az eljárást folytatva előbb-utóbb az I. esethez kell eljutnunk, ha előbb nem, akkor, amikor a két szám minimuma 1 lesz.

Ezzel beláttuk, hogy k csak négyzetszám lehet.

Nézzük még meg, milyen számpárok elégítik ki a feladat feltételeit! Figyelembe véve, hogy a II. pont eljárásával előbb-utóbb minden megoldásból egy $(a,\ a^3)$ típusú megoldáshoz jutunk, az eljárást (a II. esetbelit) megfordítva kapjuk, hogy a megoldások az

$$a_1 = a, \quad a_2 = a^3, \quad a_{n+2} = a^2 a_{n+1} - a_n$$

típusú sorozatok szomszédos elemeiből álló számpárok.

Bíró András (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

A 6. feladat több szempontból is a legnehezebbnek bizonyult a versenyen. A magyar csapat például mindössze egyetlen pontot szerzett ezen a feladaton. Ennél talán többet mond, hogy az olimpiai bizottság tagjai közül – ez a bizottság hat kiválló ausztrál matematikusból állt, és ők választották ki a részt vevő országok javaslataiból azt a 31 feladatot, amelyik a nemzetközi zsűri elé került – senki sem tudta megoldani.

Hosszas vita után végül kitűzték. Sokan fogadtak arra, hogy nem, vagy alig lesz jó megoldás, és majd mindenki veszített. Végül 11 (!) versenyző oldotta meg helyesen a feladatot. A szerzők mindegyike így vagy úgy a végtelen leszállás módszerével jutott el a megoldáshoz. Az alábbiakban a bolgár *Emanuel Atanaszov* különdíjas megoldását ismertetjük, aki talán a legelegánsabban nyúlt a problémához.

II. megoldás. Jelöljük a hányados értékét K-val és rendezzük át a feltételt. Így az

(1) $$a^2 - Kab + b^2 = K$$

összefüggéshez jutunk. Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, a K nem négyzetszám, és tekintsük az

(2) $$x^2 - Kxy + y^2 = K$$

kétismeretlenes diofantoszi egyenletet, amelynek feltételünk szerint létezik pozitív egész $(a; b)$ számokból álló megoldása.

Vegyük észre, hogy (2)-nek nem lehetnek ellenkező előjelű megoldásai, hiszen ekkor a bal oldalon

$$-Kxy > K \text{ és } x^2 - y^2 > 0.$$

Olyan megoldása sincs a (2) egyenletnek, ahol az egyik szám 0 volna, hisz ekkor a bal oldal értéke négyzetszám. (Lényegében itt használjuk fel az indirekt föltevést!)

Tekintsük most a (2) egyenletnek azt a pozitív $(A,\ B)$ megoldását, amelyre a két szám közül a nem nagyobb – legyen ez B – *minimális.* Ilyen létezik és az előbbiek szerint $A \geqq B > 0$.

A (2)-ben y helyére B-t helyettesítve az immár egyismeretlenes

$$x^2 - KBx + B^2 - K = 0 \tag{3}$$

egyenletet kapjuk, amelynek tehát az A megoldása. A másodfokú (3) egyenlet másik, A' gyökére

$$A + A' = KB,$$

tehát A' is egész.

Az (A', B) számpár is megoldása (2)-nek, a B pozitív, így az A' is az. A gyökök és együtthatók közti másik összefüggésben a gyökök szorzata pozitív:

$A'A = B^2 - K > 0$, ahonnan

$0 < A'A < B^2$, vagyis

$A \geqq B$ miatt $A' < B$!

Abból a feltevésből kiindulva, hogy a K nem négyzetszám, találtunk a (2) egyenletre egy másik megoldást, az $(A'B)$ számpárt, ahol $0 < A' < B$, ellentétben az (A, B) megoldásra előírt kikötésünkkel. Ez azt jelenti, hogy a K valóban négyzetszám.