Sokszor hasznos lehet, ha irracionális számokat hozzájuk közel eső racionális számokkal helyettesítünk. Most egy olyan módszerrel ismerkedhetünk meg, melynek segítségével teljes általánosságban megoldhatjuk a 2425. gyakorlatot.[1]

Közismert, hogy az irracionális számok tetszőleges pontossággal közelíthetők racionális számokkal: adott nevezőjű törtek között ugyanis van olyan, amelyik a nevező reciprokának a felénél közelebb van a vizsgált irracionális számhoz, és ez az eltérés bármilyen kicsi lehet, ha a nevező elég nagy.

Vajon van-e ennél jobb módszer, léteznek-e olyan közelítő törtek is, amelyek a nevezőjük reciprokánál kisebb nagyságrendben térnek el a vizsgált számtól? Másképpen szólva lehet-e a valós számokat már viszonylag kis nevezőjű törtekkel is viszonylag jól közelíteni? A $\sqrt{3} = 1,73205\ldots$ számot például a két tizedesre pontos $1,73 = 173/100$ értéknél jobban közelíti meg a lényegesen kisebb nevezőjű $26/15 = 1,733$, és még sokkal jobban a 100-nál még mindig kisebb nevezőjű $97/56 = 1,73214\ldots$.

Az $\dfrac{1}{2}$ viszont bármely tőle különböző p/q törttől legalább $\dfrac{1}{2q}$ távolságra van, és ez általában is igaz: a racionális számokat ilyen értelemben nem lehet jól közelíteni.

1. Tétel: Ha egy $\dfrac{a}{b}$ racionális számot tőle különböző, q nevezőjű racionális törtekkel közelítünk, akkor a hiba mindig legalább $\dfrac{1}{bq}$.

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy $\dfrac{a}{b} \neq \dfrac{p}{q}$, $bq > 0$. Ekkor

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geqq \frac{1}{bq},$$

mert $aq - bp$ 0 -tól különböző egész szám.

Egészen más a helyzet az irracionális számok esetében :

2. Tétel: Tetszőleges α irracionális számhoz végtelen sok $\dfrac{p}{q}$ alakú racionális szám található ($q > 1$), melyre $\left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^2}$, a közelítés hibája tehát kisebb, mint a nevező reciprokának a négyzete.

(*Feladat*: Bizonyítsuk be, hogy az ilyen törtek mind különböző nevezőjűek.)

Bizonyítás: Legyen N egy olyan pozitív egész szám, hogy $\dfrac{1}{N}$ már kisebb, mint α -nak a hozzá legközelebb eső egész számtól való eltérése. Tekintsük a következő $N+1$ darab 1 -nél kisebb, nem negatív számot:

$$\{\alpha\},\ \{2\alpha\},\ \ldots,\ \{N\alpha\},\ \{(N+1)\alpha\}.$$

Ezek egyike sem 0 és semelyik kettő nem egyenlő, különben az α racionális volna. Van tehát köztük kettő, $\{i\alpha\}$ és $\{j\alpha\}$, melyek eltérése $\dfrac{1}{N}$-nél kisebb:

$$0 < \{i\alpha\} - \{j\alpha\} < \frac{1}{N},$$

különben nem férne el az $N+1$ darab szám a $(0,\ 1)$ intervallumban. Ekkor a törtrész definíciója szerin

$$0 < i\alpha - [i\alpha] - j\alpha + [j\alpha] < \frac{1}{N}, \quad \text{azaz}$$
$$[i\alpha] - [j\alpha] < (i-j)\alpha < [i\alpha] - [j\alpha] + \frac{1}{N}.$$

Ha most $i > j$, akkor $q = i - j$, $p = [i\alpha] - [j\alpha]$ választással:

$$p < q\alpha < p + \frac{1}{N}, \quad \text{ahonnan}$$
$$\frac{p}{q} < \alpha < \frac{p}{q} + \frac{1}{Nq} \quad \text{és így valóban}$$
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{Nq} \leqq \frac{1}{q^2},$$

ugyanis $1 \leqq i,\ j \leqq N+1$ miatt $q = i - j \leqq N$. Ha pedig $i < j$, akkor $q = j - i$, $p = [j\alpha] - [i\alpha]$ választással jutunk ugyanerre az eredményre.

[1] A megoldás a KÖMAL 1988/3. számának 114. oldalán olvasható.

A q nagyobb 1 -nél, hiszen egyébként $|\alpha - p| < \dfrac{1}{N}$ volna, ellentétben N választásával. Egy megfelelő $\dfrac{p}{q}$ törtet tehát már találtunk. Ha most egy olyan N_1-et választunk, melyre $\dfrac{1}{N_1} < \left|\alpha - \dfrac{p}{q}\right|$, akkor a fenti eljárást N helyett N_1 -gyel elvégezve olyan $\dfrac{p_1}{q_1}$ törthöz jutunk, melyre

$$\left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{q_1^2}, \quad \text{továbbá} \quad \left|\alpha - \frac{p_1}{q_1}\right| < \frac{1}{N_1 q_1} < \frac{1}{N_1},$$

és ezért $\dfrac{p}{q}$ és $\dfrac{p_1}{q_1}$ különbözők. Ha most ezt az eljárást folytatjuk, tehát $\dfrac{p_{i+1}}{q_{i+1}}$ előállításához úgy választjuk N_{i+1} -et, hogy

$$\frac{1}{N_{i+1}} < \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right|$$

legyen, akkor végtelen sok különböző $\dfrac{p_i}{q_i}$ törtet kapunk, melyekre

$$q_i > 1 \quad \text{és} \quad \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

Még egy lépéssel továbbmehetünk, és megkérdezhetjük, mi a helyzet, ha egyszerre több számot szeretnénk azonos nevezőjű törtekkel közelíteni. Az előző bizonyítás módszerét magasabb dimenziókban általánosítva (pl. két irracionális szám, α és β esetén a $(0,1)\times(0,1)$ egységnégyzet $(\{i\alpha\},\ \{j\beta\})$ koordinátájú pontjait tekintve) a következő eredményre juthatunk:

3. Tétel: Legyenek $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tetszőleges irracionális számok. Ekkor található végtelen sok q pozitív egész, és minden egyes q -hoz a megfelelő $p_1, \dots, p_m$ egész számok úgy, hogy

$$\left|\alpha_i - \frac{p_i}{q}\right| < \varepsilon_q = \frac{1}{q^{1+\frac{1}{m}}}$$

teljesül **egyszerre** *$i = 1, 2, \dots, m$ esetén.*

Ez azt jelenti, hogy a „szimultán" közelítés hibája még mindig kicsi a nevező reciprokához képest: $\varepsilon_q \cdot q \to 0$, ha $q \to +\infty$.

*

A 3. Tétel ismeretében már bátran hozzáfoghatunk a 2425. gyakorlat következő általánosításához:

4. Tétel: Az $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_{2n+1}$ valós számokról tudjuk, hogy bárhogyan is hagyunk el közülük egyet, a maradék $2n$ szám két n elemű halmazra bontható úgy, hogy a két halmazban egyenlő az elemek összege. Ekkor a számok mind egyenlők.

Bizonyítás: Ha az a_i számok egészek, akkor csak a 2425. gyakorlat megoldására kell hivatkoznunk. Ebből könnyen nyerhetjük az állítást, ha az a_i számok mind racionálisak, ugyanis a számokat a nevezők legkisebb közös többszörösével szorozva a feltétel továbbra is fennáll, számaink pedig egészek lesznek.

Mit tehetünk azonban akkor, ha a számok között irracionálisak is akadnak? Tegyük fel először, hogy az a_i számok mindegyike irracionális. Stratégiánk ekkor a következő lesz : az a_i számokat alkalmas racionális számokkal közelítve a 3. Tételből ezeknek a racionális számoknak az egyenlőségét kapjuk, ebből pedig maguknak az a_i számoknak az egyenlőségét is beláthatjuk.

Legyen tehát a q egy, a 3. Tétel biztosította nevező, $r_i = \dfrac{p_i}{q}$ pedig a tételbeli a_i racionális közelítése, melyre tehát a 3. Tétel szerint

$$(*) \qquad |a_i - r_i| < \varepsilon_q = \frac{1}{q^{1+\frac{1}{2n+1}}}, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

Megmutatjuk, hogy ha q elég nagy – a 3. Tétel biztosítja, hogy ez lehetséges –, akkor (*)-ból következik, hogy az r_i racionális számokra is teljesülnek a 4. Tétel feltételei, és így azok egyenlők. Ha ezután R_q jelöli közös értéküket, akkor (*) szerint

$$|a_i - R_q| < \varepsilon_q, \quad i = 1, 2, \dots, 2n+1$$

és így

$$|a_i - a_j| \leqq |a_i - R_q| + |a_j - R_q| < 2\varepsilon_q,$$

amiből valóban a 4. Tétel állítása, $a_i = a_j$ adódik, hiszen ε_q bármilyen kicsi lehet, ha q elég nagy.

Be kell még látnunk, hogy az r_i racionális közelítésekre valóban teljesülnek a 4. Tétel feltételei, ha a q elég nagy. Válasszunk ki egyet az r_i számok közül, és legyen a megfelelő a_i elhagyása után kapott két egyenlő összegű csoport

$$a_1', \; a_2', \; \ldots, \; a_n' \quad \text{és} \quad a_{n+1}', \; a_{n+2}', \; \ldots, \; a_{2n}'.$$

(Ezek az $a_1, \; a_2, \; \ldots, \; a_{i-1}, \; a_{i+1}, \; \ldots, \; a_{2n+1}$ számok valamilyen sorrendben.) Megmutatjuk, hogy ha q elég nagy, akkor a megfelelő

$$(r_1' + r_2' + \ldots + r_n') - (r_{n+1}' + r_{n+2}' + \ldots + r_{2n}') = r_q$$

különbség abszolút értéke kisebb, mint $1/q$. Mivel r_q egy q nevezőjű tört – hisz ilyenek összegének különbsége – ez csak az $r_q = 0$ esetben lehetséges, vagyis elegendően nagy q -ra az r_i közelítésekre valóban teljesülnek a 4. Tétel feltételei. Tekintsük ehhez r_q alábbi alakját:

$$\begin{aligned} r_q = \quad & (a_1' + a_2' + \ldots + a_n') - (a_{n+1}' + \ldots + a_{2n}') + \\ & +(r_1' - a_1') + (r_2' - a_2') + \ldots + (r_n' - a_n') + (a_{n+1}' - r_{n+1}') + \ldots + (a_{2n}' - r_{2n}'). \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy

$$(a_1' + a_2' + \ldots + a_n') - (a_{n+1}' + a_{n+2}' + \ldots + a_{2n}') = 0,$$

így

$$r_q = \sum_{i=1}^{n}(r_i' - a_i') + \sum_{i=n+1}^{2n}(a_i' - r_i').$$

Mivel összeg abszolút értéke kisebb, vagy egyenlő, mint a tagok abszolút értékének összege, innen (*) felhasználásával

$$|r_q| \leqq \sum_{i=1}^{2n} |a_i' - r_i'| < 2n \cdot \varepsilon_q$$

adódik.

Láttuk, hogy a 3. Tétel biztosítja, hogy még $\varepsilon_q \cdot q$ is a 0 -hoz tart, és mivel $2n$ adott szám – a 2425. gyakorlatban pl. 10 –, ezért ha q elég nagy, akkor $2n \cdot q \cdot \varepsilon_q < 1$, azaz $2n \cdot \varepsilon_q < \dfrac{1}{q}$, és ezt akartuk bizonyítani.

Ezzel teljes egészében igazoltuk a 4. Tételt arra az esetre, ha az a_1, a_2 …, a_{2n+1} számok mindegyike irracionális. Látnunk kell, hogy a bizonyítás lényegesen kihasználja, hogy a számok között nincsen racionális, ellenkező esetben ugyanis a (*)-beli becslés hibája q -val szorozva már nem volna tetszőlegesen kicsivé tehető.

Mit tegyünk tehát, ha a számok között racionális és irracionális számok is vannak. Nos, a 2425. gyakorlat megoldásában láttuk, hogy ha az a_i számok mindegyikéhez hozzáadjuk ugyanazt az α számot, akkor az így kapott b_i számokra ugyanaz a feltétel teljesül, mint az a_i számokra. Ha most α -t meg tudjuk úgy választani, hogy a b_i számok már mind irracionálisak legyenek, akkor az eddigiek alapján ez a b_i számok egyenlőségét jelentené, ami természetesen maga után vonná az a_i számok egyenlőségét is.

Éppen ilyen α létezését biztosítja az alábbi, önmagában is érdekes

Lemma: Ha a_1, a_2, …, a_m tetszőleges valós számok, akkor létezik olyan α valós szám, hogy az

$$a_1 + \alpha, \; a_2 + \alpha, \; \ldots, \; a_m + \alpha$$

összegek mindegyike irracionális.

Bizonyítás: Ha minden a_i racionális, akkor bármely irracionális α megfelelő. Föltehető tehát, hogy pl. a_i irracionális. Azt állítjuk, hogy az

$$\alpha_1 = a_1, \; \alpha_2 = 2a_1, \; \ldots, \; \alpha_m = m \cdot a_1, \; \alpha_{m+1} = (m+1)a_1$$

számok között van megfelelő. Ha nem, akkor a skatulya-elv szerint van két különböző α_j, hogy ugyanarra az a_i -re racionális $a_i + \alpha_{j_1}$ és $a_i + \alpha_{j_2}$. Ekkor e két szám különbsége, $\alpha_{j_1} - \alpha_{j_2} = (j_1 - j_2)a_1$ is racionális, ami nem lehet, hisz a_i irracionális, $j_1 - j_2$ pedig 0-tól különböző egész.

Ezzel a lemmát és egyúttal a 4. Tételt is teljes egészében igazoltuk.