Az alábbiakban egy klasszikusnak számító hamis-pénz probléma általánosításával foglalkozunk.

Először is lássuk az eredeti feladatot, amely megtalálható például *Martin Gardner* könyvében, aki talán a legnagyobb „élő klasszikusa" a logikai fejtörőknek és játékoknak. Magyar nyelven *Bizám György–Herczeg János*: Sokszínű logika című könyvében (Műszaki Könyvkiadó, 1975, 1986) olvashatunk a feladatról.

Van 10 zsáknyi pénzünk. Az érmék látszatra egyformák, de az egyik zsák tartalma „hamis"; az itt lévő érmék 1 grammal könnyebbek a többinél. Ismerve a valódi pénzérmék súlyát, az a feladatunk, hogy egy beosztásos mérleg segítségével egyetlen méréssel válasszuk ki a „hamis" zsákot. Most és a továbbiakban föltesszük, hogy az egyes zsákokból korlátlan számú érmét vehetünk ki.

A megoldást valószínűleg sokan ismerik :

Számozzuk meg a zsákokat 1-től 10-ig és mindegyikből vegyünk ki annyi pénzérmét, amennyi a zsák sorszáma. Mivel ismerjük a „jó" pénzérmék súlyát, előre ki tudjuk számítani, mennyit nyomna az így kivett összesen $1+2+\ldots+10=55$ érme, ha nem volna köztük hamis. Az érmék együttes súlyát lemérve nyilván annyi grammal kapunk kevesebbet az előbb kiszámított értéknél, ahányas sorszámú zsákban találhatók a „hamis" pénzérmék.

*

A probléma 2 „hamis" zsákos változata a következő :

Van 40 zsák látszólag egyforma pénzérme, de most 2 zsákban vannak hamis érmék, amelyek 1 grammal könnyebbek, mint a valódiak. Ha ismerjük a „jó" érmék súlyát, akkor 2 méréssel keressük meg a 2 hamis zsákot.

A megoldás most a következő :

Megszámozzuk a zsákokat 1-től 40-ig, és most is a zsák sorszámával megegyező számú érmét veszünk ki az egyes zsákokból. Az előbbiek szerint ha az $1+\ldots+40=820$ valódi érme súlyának összegéből kivonjuk a mérés eredményét, akkor a két hamis zsák sorszámának az összegét kapjuk. Legyen k az így kapott szám felének az egész része. Mivel a két sorszám különböző, az első hamis zsák sorszáma nem nagyobb, mint k, a másodiké viszont igen. Az első k darab zsák között tehát pontosan egy hamis van, ez pedig egy újabb méréssel kiválasztható. Ezután pedig a két hamis zsák sorszámának összegét ismerve megtalálhatjuk a másodikat is.

Ez a megoldás nem a legjobb. Az eddigi feltételek mellett tegyük föl, hogy n darab zsák között néhány hamis – nem tudjuk, hogy mennyi – és ezekben 1 grammal könnyebbek az érmék. Ekkor egyetlen méréssel is megtalálhatjuk az összes hamis zsákot.

Vegyünk ki ehhez az 1-től n-ig megszámozott zsákok közül az i-edikből 2^{i-1} darab érmét ($i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$). Ha a_i aszerint 1 vagy 0, hogy az i-edik zsák hamis-e vagy sem, akkor a kivett érmék együttes súlya

$$\sum_{i=1}^{n}(m-a_i)\cdot 2^{i-1},$$

ahol m a valódi érmék súlya. Mivel m értékét ismerjük, így rendelkezésre áll a

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot 2^{i-1}$$

összeg, ennek kettes számrendszerbeli alakjában a számjegyeik pedig éppen az a_i számok, amelyek mutatják az egyes zsákok jellegét.

*

A feladatnak ezt a változatát némileg módosíthatjuk.

Adott n zsák, közöttük néhány hamis, amelyek számát most sem ismerjük. Minden egyes hamis zsákban egyforma nehezek az érmék, de ez a súly zsákonként különbözhet. Tudjuk, hogy valamennyi érme súlya egész szám, a valódi érmék súlya g gramm, a hamis érmék pedig könnyebbek g-nél. Talán meglepő, hogy ebben az esetben is egyetlen méréssel megtalálhatók a hamis zsákok, és a bennük levő érmék súlyát is megtudhatjuk.

Vegyünk ehhez az i-edik zsákból $(g+1)^{i-1}$ darab érmét ($1\leqq i\leqq n$). Ha g_i jelöli az érmék súlyát az i-edik zsákban, akkor a kivett érmék együttes súlya, $S=\sum\limits_{i=1}^{n}g_i\cdot(g+1)^{i-1}$. Föltevésünk szerint $1\leqq g_i\leqq g$, így a g_i számok éppen a $(g+1)$ alapú számrendszerben felírt S szám számjegyei. A feladat előbbi változatával szemben most nagyon lényeges volt, hogy az érmék súlya egész szám. (A korábbiakban az m értékéről ezt nem kellett föltennünk.)

Vegyük észre, hogy a „valódi" súly értékére csak annyiban volt szükségünk, hogy találhattunk egy olyan egész számot – a $(g+1)$-et – amelyik valamennyi előforduló érme súlyánál nagyobb. Amennyiben ezt az értéket sem ismerjük, akkor két mérés szükséges a feladat megoldásához. Először minden zsákból egy-egy érmét kivéve megkaphatjuk a $G=g_1+g_2+\ldots+g_n$ összeget, amely minden g_i-nél nagyobb, ezután pedig a $(g+1)$ helyett a G hatványaival dolgozva a fenti eljárással megtudhatjuk az egyes g_i értékeket.

Irodalom:

Martin Gardner:

First and Second Scientific American Books of Mathematical Puzzles and Diversions

Bizám György–Herczeg János:

Sokszínű logika, 52., 53. feladatok

G. Sesztopol:
Hogyan keressük ki a hamis érmét?
KÖMAL, 1980/1 szám, 1–5. old.