Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 1986. október 18-án tartotta 63. versenyét Budapesten és 12 vidéki városban az abban az évben érettségizettek és a középiskolai tanulók részére. A versenyzők 5 órai munkaidő alatt oldhattak meg három fizikai feladatot. Bármely segédeszköz használata meg volt engedve, beleértve természetesen a zsebszámítógépet is. A versenyben 332 dolgozatot adtak be. Ismertetjük a feladatokat és a verseny eredményét.

1. *Egy* 15 kg *tömegű test súrlódásmentesen csúszik végig egy sinus alakú lejtőn (*1. ábra*). Amikor A-ban van, akkor sebessége* $v_0 = 6$ m/s *Mekkora erővel nyomja a lejtőt, amikor C-ben van? $AB = 1,4$ méter, $g = 10$ m/s^2.*

1987-02-081-1.eps

1. ábra

(Vermes Miklós)

Megoldás. A-ban az mg súlyerő éppen a körmozgáshoz szükséges v_0^2/r erőt szolgáltatja. Itt r valamiféle rádiusz, amivel a sinus-görbe helyettesíthető (görbületi sugár):

$$mg = \frac{mv_0^2}{r},$$

innen $r = v_0^2/g = 3,6$ méter.

C-ben a test sebessége v,

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m \cdot v_0^2}{2} + mgh,$$

innen a C-ben levő sebesség:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = \sqrt{92}\ \text{m/s} = 9,59\ \text{m/s}.$$

A nyomóerő C-ben:

$$mg + \frac{mv^2}{r} = 533\ \text{newton}.$$

2. *Egy alul zárt, felül nyitott cső alsó felében* 304 K *hőmérsékletű levegő, felette higany van. Az elzárt levegő hőmérsékletét lassan emeljük (2. ábra).*

a) Legalább hány fokra kell emelnünk a levegő hőmérsékletét, hogy az összes higany távozzon a csőből?

b) Mennyi hőt kell a levegővel közölnünk, hogy a higany kifolyjon a csőből?

A külső levegő nyomása 76 cm *magas higanyoszlop nyomásával egyezik meg. Ezen a nyomáson,* 304 K *hőmérsékleten a levegő sűrűsége* 1,2 g/dm^3*. A levegő fajhője állandó térfogaton* $c_v = 0,75$ J/gK*. A higany és az üveg hőtágulásától eltekintünk.*

1987-02-081-2.eps

2. ábra

(Szegedi Ervin)

Megoldás. Első rátekintésre látható, hogy a gáztörvénnyel megegyezésben van az az állapot, amikor 304 K hőmérsékleten nincs higany a csőben. De hőfelvétel nélkül nem lehet átjutni ebbe az állapotba.

Jelöljük x-szel a higanyszint felemelkedését eredeti szintjéhez képest. A térfogatot cm-ben, a nyomást higanycentiméterben mérjük. Eredetileg a 76 cm térfogatú levegő $76 + 76$ Hgcm nyomáson van, x darabbal feljebb tolódva a térfogat $76 + x$, nyomása $76 + 76 - x$. A gáztörvény szerint:

$$\frac{(76 + 76)76}{304} = \frac{(76 + x)(76 + 76 - x)}{T}.$$

Az egyensúlyhoz tartozó T hőmérséklet:

$$T = 304 \cdot \left[1 + \frac{1}{152} \cdot x - \frac{1}{11552} \cdot x^2\right].$$

1987-02-082-1.eps

3. ábra

A függvénynek maximuma van 342 K hőmérsékleten (3. ábra) Ekkor $x = 38$ cm, $p = 114$ Hgcm.

1987-02-082-2.eps

4. ábra

A körülményeket a $p-V$ diagrammon kell megvizsgálnunk (4. ábra). A külső levegő és a higanyoszlop együttes nyomását süllyedő egyenes tünteti fel 76 cm-es térfogattól 114 cm-ig az egyenes pontjai stabilis egyensúlyi állapotokat jelentenek. Efelett az egyenes pontjaihoz tartozó állapotok labilis egyensúlyt jelentenek, mert a gáz nyomása nagyobb, mint az együttes külső nyomás. A 342 K-hez tartozó izotermát érinti a külső nyomás egyenese. Kérdés, amikor a lassú hőmérséklet-emeléssel elértük a 342 K-t és azt egy kissé túllépjük, akkor mi történik a higannyal?

A lassú melegítés történhet úgy, hogy a cső fala jó hővezető, és a cső egy termosztátban van, amelynek hőmérsékletét lassan emeljük. Ha most a levegő hőmérsékletét 342 K-en tartjuk, az állapotot jelző pont az izotermán halad lefelé, és a higany 342 K hőmérsékleten kifolyik.

A termosztátos kivitel esetében számítjuk ki a levegő hőfelvételét. A levegő kezdeti térfogata $0,548\ \mathrm{cm}^2\cdot 76\ \mathrm{cm}=41,65\ \mathrm{cm}^3$, ekkor a sűrűsége $2,4\ \mathrm{g/dm}^3$, a levegő tömege $0,1$ gramm.

342 K-ig történő melegítés alkalmával a levegő energiájának növekedése:

$$\Delta E=0,75\cdot 0,1(342-304)=2,850\ \text{joule}.$$

Az átlagos nyomás eközben:

$$p=\frac{2\cdot 1,01\cdot 10^5+1,5\cdot 1,01\cdot 10^5}{2}=1,75\cdot 1,01\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}.$$

A munkavégzés a 114 cm-es térfogatig történő kiterjedéskor:

$$p\Delta V=-1,75\cdot 1,01\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\cdot 0,548\cdot 10^{-4}\cdot 38\cdot 10^{-2}\mathrm{m}^3=-3,644\ \text{joule}.$$

Ehhez járul az izotermális kiterjedés munkavégzése; a levegő mennyisége $10^{-4}:28,8=3,472\cdot 10^{-6}$ kmol. Az izotermális kiterjedéshez tartozó munkavégzés:

$$-3,472\cdot 8200\cdot 342\cdot \log\text{nat}\frac{152}{114}=-2,801\ \text{joule}.$$

A gázon végzett összes munka: $\Delta W=-3,644-2,801=-6,445$ joule. A gázzal közölt hő a kísérlet termosztátos kivitele esetében az I. főtétel szerint:

$$\Delta Q=2,850+6,445=9,295\ \text{joule}.$$

Elképzelhető a kísérlet elvégzése úgy is, hogy a cső fala hőszigetelő és a hőközlést egy beépített izzószál működtetésével hajtjuk végre. Ebben az esetben amikor elértük, vagy esetleg egy kicsit túlléptük a 342 K hőmérsékletet, a higany nem lökődik ki, mert az izotermálisan kiterjedő és lehűlő levegő nyomása kisebbé válik annál, amennyi a higany kilökéséhez szükséges. Ekkor azt kell keresnünk, hogy mely hőmérsékleten érint a külső nyomást feltüntető egyenes egy adiabatát (5. ábra).

1987-02-083-1.eps

5. ábra

Az adiabata egyenlete: $pV^\varkappa=K,\quad p=\dfrac{K}{V^\varkappa}$.

Érintőjének tangense:

$$\frac{dp}{dV}=\frac{-\varkappa K}{V^{\varkappa+1}}=\frac{-\varkappa K}{V}\cdot\frac{1}{V^\varkappa}=\frac{-\varkappa p}{V}.$$

A külső nyomás egyenesének tangense -1, ezért $-1=\dfrac{-\varkappa p}{V}$. Az érintési pontnak az egyenesen is rajta kell lennie:

$$p=228-V.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$V=\frac{228\varkappa}{1+\varkappa}=1,33\ \mathrm{cm},\quad p=\frac{228}{1+\varkappa}=95\ \mathrm{Hgcm}.$$

Az ehhez tartozó hőmérséklet $332,5$ K. Eddig kell apró adagokban lassan hőt közölni a levegővel, hogy a higany kilökődjön.

Kiszámítjuk az adiabatikus megoldás esetében szükséges hőközlést.

A levegő energiájának növekedése:

$$\Delta E = 0,75 \cdot 0,1 \cdot (332,5 - 304) = 2,138 \text{ joule.}$$

Az átlagos nyomás:

$$p = \frac{2 \cdot 1,01 \cdot 10^5 + 1,25 \cdot 1,01 \cdot 10^5}{2} = 1,64 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$

A térfogatváltozás:

$$\Delta V = 0,548 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0,75 \cdot 0,75 \text{ m} = 3,124 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3.$$

A gázon végzett munka : $\Delta W = -1,64 \cdot 10^5 \cdot 3,124 \cdot 10^{-5} = -5,123$ joule. Az I. főtétel szerint a hőközlés:

$$Q = 2,138 + 5,123 = 7,261 \text{ joule.}$$

3. *Egy kondenzátor a és b méretű lemezeinek a síkjai φ szöget zárnak be. Mekkora a kondenzátor kapacitása? (6. ábra)*

1987-02-084-1.eps

6. ábra

(Vermes Miklós)

Megoldás. Az erővonalak a lemezekről merőlegesen indulnak ki (7 ábra). Sűrűségüknek a távolsággal fordított arányban kell csökkenni, mert a potenciálkülönbség a lemezek bármely két pontja között ugyanakkora, és a töltésegység átvivésének a munkája (a potenciálkülönbség) csak így lehet mindenütt ugyanakkora.

1987-02-084-2.eps

7. ábra

A térerő a lemezek bal oldali végén E_0, a metszési éltől x távolságban

$$E = \frac{c}{x} \cdot E_0.$$

A síkok metszési élétől x távolságban dx szélességű, a hosszúságú sávon dQ töltés van, az ezekből kiinduló erővonalak száma $4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 dQ$. Ugyanez a térerővel kifejezve:

$$4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot dQ = aEdx = a \cdot \frac{c}{x} \cdot E_0 \cdot dx.$$

A dx szélességű sávon levő töltés:

$$dQ = \frac{a}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \frac{c}{x} \cdot dx.$$

A kondenzátor összes töltése:

$$Q = \int_c^{c+b} \frac{aE_0c}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9 x} dx = \frac{aE_0c}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \log \text{nat} \frac{c+b}{c}.$$

A lemezek közötti potenciálkülönbség (az 1 coulomb átvivési munkája) például a lemezek bal szélén, E_0 térerő és c út mellett:

$$U = E_0 c \cdot \varphi$$

A kondenzátor kapacitása $C = Q/U$ alapján:

$$C = \frac{a}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \cdot \log \text{nat} \left(1 + \frac{b}{c}\right).$$

A verseny eredménye

I. díjat ketten kaptak egyenlő helyezésben: *Kaiser András* és *Kohári Zsolt*; mindketten a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki Karának hallgatói és a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban érettségiztek mint Horváth Gábor tanítványai.

II. díjat kapott *Drasny Gábor,* a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium III. o. tanulója; tanára: Horváth Gábor.

III. díjat öten kaptak egyenlő helyezésben: *Jakovác Antal* honvéd, aki a budapesti Apáczai Csere János Gyakorló Gimnáziumban érettségizett, mint Kelemen László tanítványa; *Ligeti Zoltán* és *Montágh Balázs*, a budapesti Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának fizikus, illetve matematikus hallgatói; mindketten a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnáziumban érettségiztek mint Horváth Gábor tanítványai; továbbá *Cynolter Gábor* és *Gyuris Viktor*, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. o. tanulói, tanáruk Horváth Gábor.

Dicséretet ketten kaptak egyenlő helyezésben: *Benczúr András*, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Horváth Gábor) és *Török Balázs*, a budapesti I. István Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Moór Ágnes).

A bizottság dicsérőleg állapította meg, hogy a 2. feladatra kiemelkedően szép megoldást adott *Majoros László*, a budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Gimnázium IV. o. tanulója (tanára Horváth Gábor).