

„A csoda, a matematika nyelvének alkalmas volta a fizika törvényeinek megfogalmazására. varázslatos adomány, amelyet nem értünk és nem is érdemlünk meg.”

Wigner Jenő

Bevezetés¹

A fizikai problémák elméleti tárgyalásánál és konkrét feladatok megoldásánál általában a következő „menetrendet” követjük:

1. Megpróbáljuk a problémát – az adott esetben lényegesnek, illetve lényegtelennek ítélt jelenségek szétválasztásával – a fizika valamelyik ágába, részterületébe sorolni, vagyis eldöntjük, hogy jellegét tekintve pl. mechanikai-, elektromos-, optikai-, vagy éppen hőtani feladattal állunk szemben. Ez a besorolás nem mindig egyszerű és nem is mindig lehetséges, hiszen például egy erősen melegedő tranzisztor, vagy a mágneses „lencsékkel” fókuszált elektronnyaláb viselkedésének leírásához nem elegendő a fizika tankönyvek egy-egy fejezetének ismerete.

2. Az adott részterület alapvető törvényeinek ismeretében (például a Kirchoff-törvények, a Newton-egyenletek, vagy az egyesített gáztörvény alapján) *matematikai összefüggéseket* keresünk a minket érdeklő probléma ismert és ismeretlen mennyiségei között. Ezt általában úgy tesszük, hogy mind az ismert mennyiségeket (például egy szabadon eső test tömegét, vagy egy gáz kezdeti hőmérsékletét), mind pedig a keresett mennyiségeket (földetérés idejét, a gáz leendő nyomását stb.) algebrai szimbólumokkal, betűjelekkel látjuk el (m, T_0, t, p_1, \dots) s ezek segítségével írjuk fel a jelenségkör fizikai törvényeit.

3. A következő lépés az egyenletek megoldása. Feltételezve, hogy elegendő számú fizikai törvényt sikerült az adott probléma konkrét körülményeire alkalmaznunk, az egyenleteink matematikai értelemben határozottak, megoldhatók lesznek, s csak rajtunk (matematikai tudásunkon, vagy a számítógépünk sebességén és nagyságán) múlik, hogy ténylegesen meg tudjuk-e oldani a feladatot.

4. Ha szerencsénk van, akkor a feladatot nem csupán egy bizonyos adatsereggel, a feladatban szereplő aktuális számértékekkel tudjuk megoldani, hanem általánosabb, sokféle adat esetén érvényes formulát, analitikus kifejezést is sikerül adnunk. Ha például egy $l=0,5$ m hosszú inga lengés idejét szeretnénk kiszámítani, s tudjuk, hogy a Föld felszínén a nehézségi gyorsulás $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ nagyságú, akkor – a Newton-törvények segítségével – nemcsak azt számíthatjuk ki, hogy a keresett lengésidő 1,42 s, hanem azt is, hogy általában $T = 2\pi \cdot \sqrt{l/g}$. Ennek a képletnek az ismerete lehetőséget kínál arra, hogy meghatározzuk, mennyi lenne a lengés ideje egy 20 m-es ingának a Holdon, vagy hogy ilyen kérdéseken is elgondolkozzunk: hányszorosára kellene megnövelnünk egy ingának a hosszát, ha azt akarjuk, hogy a szokásosnál k -szor gyengébb gravitációs térben N -szer hosszabb ideig tartson egy lengés k és N adott számok.

5. Az utolsó lépés az, hogy a korábban kapott formulába behelyettesítjük a feladat konkrét számadatait, s numerikusan (valamilyen pontossággal) kiszámítjuk a végeredményt.

A továbbiakban a 4. pontban említettekkel fogunk részletesebben foglalkozni. Azt a fajta vizsgáldást, mely során egy eredményül kapott formula, képlet alakját, illetve tartalmát, „működését” vizsgáljuk, meghatározzuk, hogy milyen adatok (ún. paraméter-értékek) esetén értelmes egyáltalán a képlet, s hogy milyen határesetei, esetleg érdekes szimmetria-tulajdonságai vannak a formulának, szóval az eredménynek ezt a fajta „kóstolgatását, ízlelgetését” a megoldás *diszkussziójának* nevezzük.

A diszkusszióba az is beletartozik, hogy elgondolkozzunk azon, mit jelent az, ha a képlet valamilyen adatsereg mellett értelmetlenné, „szingulárisá”, tehát megoldhatatlanná válik, vagy éppen az ellenkezője történik: többértékűvé, vagy esetleg teljesen határozatlanná válik a formulánk.

Van-e valamilyen kapcsolat a matematikai szingularitások, az egyenletek többszörös gyökei, a „hamis gyökök” megjelenése és a fizikai valóság, a természetben megfigyelhető jelenségek realitása között, vagy pedig el kell fogadnunk, hogy bizonyos esetekben (amikor például negatív gáznyomás, komplex számértékű sebesség, vagy egy anyagdarab atomjainak számára nem egész érték adódik) az eredményt, vagy az eredmények egy részét el kell dobnunk, fizikailag értelmetlennek kell nyilvánítanunk.

Ezek egyáltalán nem könnyű és a tudásunk mai szintjén nem is mindig megválaszolható kérdések. Hacsak nem akarunk az elvont filozófalgatás szintjén maradni, célszerű lesz néhány konkrét példát megvizsgálnunk, s megpróbálhatunk ezekből általánosabb jellegű tanulságokat leszűrni. Az itt következő példák egy része nagyon egyszerű, s nagyon jól ismert a KML olvasói, feladatmegoldói számára. Kérem, hogy ezeknél az illusztrációknál ne a feladat primitívségén bosszankodjanak, hanem a diszkusszió menetére, az abból adódó tanulságokra figyeljenek! A példák között találhatóak majd olyanokat is, melyeknek elméleti alapja, fizikai háttere bizonyára teljesen ismeretlen és érthetetlen a középiskolában tanultak alapján. Kérem az Olvasókat, hogy ezeknél a problémáknál fogadják el tényként a leírtakat, s ne feszegetessék azt, hogy miért van ez így, honnan kaptuk ezeket a formulákat, (hiszen ezek elmagyarázására itt és most nyilván nincs lehetőség), s ismét csak a következtetésekre, a tanulságokra figyeljenek elsősorban!

Negatív szám a gyökjel alatt

Hajtsunk el egy testet v_0 kezdősebességgel függőlegesen felfelé! Mekkora lesz a sebessége az elhajítás helyétől mért h magasságban?

Akár az egyenletesen változó mozgásokra érvényes

¹ Elhangzott a 44. Téli Ifjúsági Fizikai Ankénton.

$$h = v_0 \cdot t - \frac{g}{2}t^2, \quad v = v_0 - g \cdot t$$

összefüggésekből, akár az energia megmaradását kifejező

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mg \cdot h$$

összefüggésből indulunk is ki, némi algebrai átalakítás után a

$$(1) \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}$$

eredményt kapjuk Ennek a képletnek a segítségével különböző h és v_0 értékek esetén kiszámíthatjuk v számértékét, legalábbis akkor, ha a gyökjel alatt nem negatív szám áll. De vajon mit jelent az, hogy pl. $v_0 = 10$ m/s és $h=6,25$ m-es adatoknál

$$(2) \quad v = \sqrt{100 \text{ m}^2/\text{s}^2 - 2 \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 6,25 \text{ m}} = \sqrt{-25} \text{ m/s.}$$

Ez az eredmény fizikailag értelmetlen, hiszen a valós számok körében maradván egy negatív számból nem lehet négyzetgyököt vonni, a sebesség pedig – lévén egy elmozdulásnak és egy időtartamnak a hányadosa – nyilvánvalóan valós szám kell legyen.

A paradoxon megoldása nem túl nehéz: az (1) egyenlet csak $v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h \geq 0$ esetben érvényes, hiszen azokba a pontokba, melyekre $h > v_0^2/2g$, a feldobott test egyáltalán el sem jut, tehát nincs is értelme az ottani sebességéről beszélnünk. Úgy látszik, teljes az összhang: a probléma megoldásaként adódott (1) egyenlet jobb oldalának matematikai értelemben vett értelmezési tartománya pontosan megfelel fizikailag reális, ténylegesen megvalósuló, illetve legalább elvben megvalósítható helyzeteknek. Ennek ellenére a merészebb képzeletű, s a komplex számokkal esetleg éppen most ismerkedő diákok elgondolkozhatnak azon, hogy a (2) egyenletben szereplő $\sqrt{-25}$ -ről – ha elfeledkezhetnénk arról, hogy ez egy fizikai mennyiséget jelöl – a matematikai könyvek azt állítják, hogy $\pm 5i$ -vel egyenlő (ahol i a képzetes egységet jelöli)! A múlt században a $v = 5i$ m/s egyenlőséget bizonyára őrültségnek tartották volna, a kvantumelmélet (más néven hullámmechanika) megszületése óta azonban már nem nevetik ki azt, aki ilyen „vad” dolgokat állít. A képzetes sebesség fizikai jelentésének tárgyalására nem térhetünk ki, elégedjék meg az Olvasó azzal, hogy nem feltétlenül irreális, fizikailag értelmetlen ez a fogalom.

Többértékű megoldások

Egy H magasságú toronyból $t = 0$ pillanatban v_0 kezdősebességgel a vízszinteshez képest α szögben elhajítunk egy testet. Milyen messze és mennyi idő múlva ér földet (1. ábra)?

1987-01-035-1.eps

1. ábra

A mozgásegyenletek általános alakja:

$$(3) \quad x = v_0 \cdot t \cdot \cos \alpha,$$

$$(4) \quad y = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \cdot t \cdot \sin \alpha + H.$$

A földet érés azon $t = T$ pillanatban következik be, amikor $y = 0$ teljesül, vagyis

$$(5) \quad -\frac{g}{2}T^2 - v_0 \cdot T \cdot \sin \alpha + H = 0.$$

Ennek a másodfokú egyenletnek két megoldása van:

$$T_{1,2} = \frac{v_0}{g} \sin \alpha \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{2H}{g}},$$

s az ezekhez tartozó vízszintes irányú elmozdulások:

$$d_{1,2} = \frac{v_0^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{g} \cdot \left(1 \pm \sqrt{\frac{2gH}{v_0^2 \sin^2 \alpha}} \right).$$

Hogyan lehetséges az, hogy az esési időre, illetve a hajítási távolságra kétféle megoldást kaptunk? Az eldobott tárgy – hacsak nem törik ketté, – nem érhet két különböző helyen földet! Melyik a jó megoldás, s a másik, ha nem jelent semmit, akkor hogyan került a képletünkbe?

A két megoldás közül nyilván a pozitív négyzetgyökhöz tartozó felel meg az 1. ábrán látható A pont adatainak. A másik gyökpár negatív: $T_2 < 0$ és $d_2 < 0$; ezeknek a számoknak semmi köze nincsen a keresett A pont jellemzőihez. Ennek ellenére nem állítjuk, hogy d_2 és T_2 semmiféle fizikai jelentéssel nem rendelkező hamis gyökök, hiszen az értelmük elég könnyen kideríthető. A megoldásunk ugyanis arra „épült”, hogy a ferde hajítást végző test pályáján olyan pontot kerestünk, amely a talajszinten található, vagyis amelynek az y koordinátája nulla. Az általunk vizsgált mozgásnál egyetlen ilyen tulajdonságú pont létezik, az A pont. Ha viszont úgy képzeljük el a mozgást hogy az nem a $t = 0$ pillanatban kezdődött, hanem már korábban, méghozzá oly módon, hogy $t = 0$ -kor éppen $y = H$ magasságba jutott el a test és a sebessége pontosan azt az a szöveget zárta be a vízszintessel, amelyiket előre megadtunk, akkor a (3) és (4) egyenletek továbbra is érvényesek, s az (5) feltételnek most már nem csupán az A , hanem a B pont is eleget tesz.

A másodfokú egyenlet másik, az eredeti feladat szempontjából érdektelen gyöke tehát egy újabb – az eredetivel rokon, de attól mégis különböző kérdésre ad választ: egy H magasságú torony tővétől milyen távolról és mikor kell eldobjunk egy testet, ha azt akarjuk, hogy egy megfelelő pillanatban (mondjuk $t = 0$ -kor) éppen a torony tetejénél legyen, és a sebessége egy megadott irányba mutasson.

Ez a példa tehát arra tanít bennünket, hogy egy fizikai probléma helyesen megfogalmazott egyenleteinek gondos matematikai megoldása, illetve a megoldás diszkussziója néha olyan, a kitűzöttnél általánosabb probléma megoldását is a kezünkbe adja, melyet eredetileg esetleg fel se vetettünk, meg se fogalmaztunk. Ilyen helyzetekben olyan érzésünk támadhat, hogy egyenleteinkből több „fizika” jön ki, mint amennyit a feladat megfogalmazásakor, az egyenletek felállításakor „beleraktunk”, tehát a természetet viselkedése, a megfigyelhető jelenségek szabályszerűsége pusztán matematikai megfontolásokkal „kitalálható”. Ez így nyilván nem igaz, inkább arról van szó, hogy az általunk felírt és alkalmazott fizikai törvények sokkal többet „tudnak”, sokkal több fizikai tartalommal rendelkeznek, mint amennyit első ránézésre nekik tulajdonítottunk.

Árulkodó képletek

Egy fizikai probléma megoldása során adódó végeredmény különböző okok miatt lehet hibás. Elképzelhető, hogy rosszul emlékeztünk az alaptörvények alakjára, vagy kifelejtettünk egy állandót, de az is lehetséges, hogy az egyenletek megoldása során vétünk valahol egy matematikai jellegű hibát. Bármilyen legyen is a hiba oka, egy rossz képlet sok bajt okozhat (épületek dőlhetnek össze, tv készülékek gyulladhatnak ki, vagy egyetemi felvételi vizsgák eredménye változhat meg egy-egy számolási hiba miatt). Jó lenne valamilyen ellenőrző mechanizmus, vagy a számítógépek önműködő hibajelző kódjához hasonló eljárás, amely – ha nem is mindig és minden körülmények között, de legalább bizonyos esetekben – figyelmeztet: Vigyázz, amit számoltál, az biztosan nem lehet jó!

Az egyik leghatékonyabb hibajelzés a dimenziópróba. A fizikai mennyiségek általában nem pusztán számok, hanem különböző mértékegységgel, *dimenzióval* rendelkeznek. Ha egy képlet dimenzióra nem helyes, akkor egészen biztosan hibás kell legyen. Sajnos fordítva nem igaz; ha a mértékegységek rendben vannak, akkor még mindig nagyon sokféle hiba lehet a számolásban.

Egy másik – talán kevésbé ismert – hibakeresési eljárás az, amely a végeredmény, a végképlet matematikai szerkezetének vizsgálatára épül, tehát a megoldás diszkusszióján alapszik. Megvizsgálhatjuk például azt, hogy formulában szereplő adatok, paraméterek milyen értékénél, vagy értékeinél „bolondul meg” a képlet, válik *szinguláris* a megoldás. Ha ez a megbolondulás fizikailag reális, tehát ténylegesen megvalósítható, beállítható adatok mellett történik, ilyen esetben válik valamelyik mennyiség végtelen nagyvá, vagy éppen komplex számmá, akkor erről bizonyára nem a természet, hanem mi magunk tehetünk, s legjobb lesz, ha rögtön nekilátunk az egész számítás gondosabb megismétléséhez.

1987-01-037-1.eps

2. ábra

Tekintsük például a 2. ábrán látható csigarendszert, melynél az egyes testek gyorsulását szeretnénk kiszámítani. (A szokásos elhanyagolásokkal élünk: a csigák és a kötelek tömegét, valamint a súrlódást és a légellenállást nem vesszük számításba.) Tegyük fel, hogy az m_1 tömegű test gyorsulására – a Newton-egyenletek felírása, bonyolult kényszerfeltételek figyelembe vétele, majd hosszas számolás után – az alábbi összefüggést kapjuk:

$$(6) \quad a_1 = \frac{m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3 - 4m_2 \cdot m_3}{m_1 \cdot m_2 - m_1 \cdot m_3 + 4m_2 \cdot m_3} g.$$

Ez a képlet dimenzióra helyes, ennek ellenére már ránézésre látszik, hogy hibás kell legyen. Miért? A nevezőben pozitív számok összege, illetve különbsége szerepel, s semmi akadályja nincsen annak, hogy történetesen olyan m_1 , m_2 és m_3 tömegértékeket válasszunk, amelyeknél a nevező nullává válik (pl. $m_1 = 6$ kg, $m_2 = 1$ kg és $m_3 = 3$ kg). Mivel ugyanezekkel az adatokkal számolva a számláló egy véges (nullától különböző) érték, a (6) képlet alapján számolt

gyorsulás értelmetlenné („végtelen nagyvá”) válik. Valóban, ha átnézzük a számításunkat, előbb-utóbb rájövünk, hogy a képlet hibás, hiszen a jó eredmény:

$$a_1^{(\text{helyes})} = \frac{m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3 - 4 \cdot m_2 \cdot m_3}{m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3 + 4 \cdot m_2 \cdot m_3} g.$$

Ebben a formulában a nevező sohasem válhat nullává, hiszen a tömegek mindegyike pozitív számértékű, tehát az így számolt gyorsulás semmilyen körülmények között nem lesz szinguláris.

Természetesen ez a hibakeresési eljárás sem tökéletes, mindig és minden körülmények között hatásos „csodagyógyszer”. Ha például a számolási hiba mindössze annyi, hogy a végképlet elé tévedésből egy 2-s szorzó kerül (főlőselegesen), ezt sem a dimenzió-vizsgálat, sem pedig a szingularitás-próba nem képes kimutatni. Ilyen jellegű hibák felkutatására olyan határesetek megvizsgálása adhat reményt, melyeknél számszerűen tudjuk a végeredményt. (Példánkban ha m_1 sokkal nagyobb, mint m_2 és m_3 , akkor az 1 jelű test lényegében szabadon esik, gyorsulása tehát $a_1 = g$ kell legyen.)

Végtelen – fizikai jelentéssel

Az előző pontban leírtak azt sugallják, hogy egy képlet ok nélkül (értsd: fizikailag megvalósítható körülmények között) nem válhat szingulárisá, nem adhat végtelen nagy értéket eredményként. Mint az alábbi példa mutatja, ez azért nem ilyen egyszerű!

1987-01-038-1.eps

3. ábra

Valaki egy „fekete dobozba” három ellenállást rejtett a 3. ábrán látható kapcsolásban. Hogyan tudnánk meghatározni a doboz kinyitása nélkül az R_1 , R_2 és R_3 ellenállásértékeket? Nyilván megtehetjük, hogy egy feszültségmérő és egy árammérő műszerrel rendre megmérjük az AB , BC és AC pontok közötti ellenállást, s mondjuk 1 k Ω , 2 k Ω és 3 k Ω értékeket kapunk. Ezek után felírhatjuk a sorosan, illetve párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredőjét megadó képleteket (tehát lényegében a Kirchhoff-egyenleteket), s így az alábbi összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} &= \frac{1}{1 \text{ k}\Omega}, \\ \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3} &= \frac{1}{2 \text{ k}\Omega}, \\ \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} &= \frac{1}{3 \text{ k}\Omega}. \end{aligned}$$

Mivel pontosan annyi ismeretlen mennyiséget szeretnénk meghatározni, ahány egyenletünk van, a feladat matematikai szempontból határozottnak látszik. Az egyenletrendezés során azonban kiderül, hogy nem ilyen egyszerű a helyzet: bizonyos képletekben nullával kellene osztanunk, s ez értelmetlen matematikai művelet (minden valamirevaló számítógép ilyen feladat láttán hibajelzéssel leáll). No, de akkor mekkorák az R_i ellenállások? Egy egyenlet (vagy egyenletrendszer) matematikai szempontból lehet ellentmondásos, tehát megoldhatatlan, de a Természetet leíró egyenletek ezt a luxust „nem engedhetik meg maguknak” – gondolhatjuk, s nem is teljesen alaptalanul. A Természet ugyanis *valahogyan* biztosan viselkedik, *valami* mindig történik, s ha a jelenségeket, folyamatokat leíró egyenletek (természetesen valamilyen keretek között) helyesen írják le a valóságot, akkor ennek az egyenletek matematikai szerkezetében, az egyenletek megoldhatóságában is tükröződni kell.

Visszatérve az ellenálláshálózat problémájához, megpróbálkozhatunk azzal, hogy nem a ténylegesen mért 1, 2 és 3 k Ω -os értékekkel, hanem általánosan R_{AB} , R_{BC} és R_{AC} paraméterértékekkel oldjuk meg az egyenletrendszerünket, s csak a legvégén helyettesítjük be a konkrét számadatokat. Ezzel persze nem kerülhetjük el, csupán halogathatjuk a nullával való osztás kérdését. Az általános megoldásból kiderül, hogy csupán akkor válik szingulárisá a feladat, ha a mért ellenállások nem tesznek eleget a háromszög egyenlőtlenségnek, vagyis ha nem igaz az, hogy bármelyik kettő összege nagyobb, mint a harmadik érték. Jelen esetben éppen a határon vagyunk 1 k Ω + 2 k Ω = 3 k Ω , ezért éppen megoldhatatlan (pontosabban kiszámíthatatlan) a feladat. Amennyiben a harmadik ellenállásmérés eredménye nem pontosan 3 k Ω -t adott volna, hanem annál egy picivel kevesebbet, mondjuk $(3 - \varepsilon)$ k Ω -t, ahol ε egy nagyon kicsi szám, akkor a feladat már megoldható lenne, s azt is látnánk, hogy az R_3 ellenállás számított értéke arányos lenne $\frac{1}{\varepsilon}$ -nal. Mít jelent ez? Mivel végtelen pontos mérés elképzelhetetlen, nyugodtan mondhatjuk, hogy *ténylegesen* $(3 - \varepsilon)$ k Ω a harmadik mérés eredménye, s ebből az következik, hogy az R_3 ellenállás nagyon nagy, a többiekhez viszonyítva „végtelen”. Mivel az ellenállás fogalmát a fizikában a feszültség és az áramerősség hányadosaként értelmezhetjük, a végtelen nagy ellenállás nem irreális fogalom, hanem egyszerűen csak azt fejezi ki, hogy a vizsgált ágba *nem folyik* áram, szakadás található.

Hasonló példákat találhatunk a fizika más területein is; a legkülönbözőbb fizikai mennyiségeknek lehet végtelen nagy az értéke – reális, megvalósítható körülmények között. Így például a szupravezető állapotban levő fémek elektromos vezetőképessége végtelen, a szuperfolyékony héliumnak a viszkozitása nulla, tehát az ennek reciprokával arányos „áramlóképesége” végtelen nagy. Ugyancsak végtelen nagy egy közönséges fém dielektromos állandója, hiszen tetszőleges kicsiny külső elektromos mező hatására számottevő mértékben polarizálódik. Egy párhuzamos határfalú üveglap (planparalel lemez) olyan lencsének tekinthető, melynek végtelen nagy a fókusztávolsága, a Naprendszerből éppen kiszökő űrszonda pályája pedig egy olyan ellipszisnek, amelynek végtelen nagy a nagytengelye. Más kérdés az, hogy az említett példákban a „végtelen nagy” mindig annyit jelent csupán, hogy „nagyon nagy” a vizsgált jelenségkörben szereplő többi mennyiséghez viszonyítva, a „végtelen kicsi”, azaz nulla pedig annyit, hogy valami a többi (hozzá hasonló dimenziójú) mennyiséghez képest nagyon kicsi; ennek részletesebb elemzése egy külön előadást igényelne.