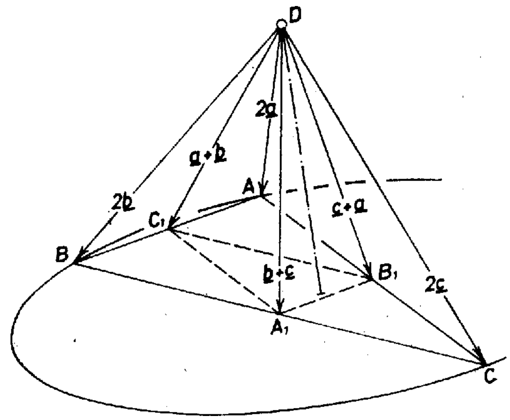
I. megoldás. Nem változik meg a felhasznált szögfelezők helyzete akkor – és így a vizsgálandó szögek értéke sem –, ha az A, B, C csúcsok bármelyikét eltoljuk D felé (de úgy, hogy ne érje el D-t), vagy az ellentétes irányban. Ezért mindjárt abból indulhatunk ki, hogy $DA = DB = DC = d$, a gúla mindegyik oldallapja egyenlő szárú háromszög, tehát az ADB, a BDC, a CDA szög felezője átmegy rendre az AB, BC, CA alapélnek C_1, A_1, illetve B_1 felezőpontján.



A bizonyítandó állítás így ekvivalens avval, hogy véve az A_1DB_1, a B_1DC_1 és a C_1DA_1 szögek cosinusát, vagy mind a három érték negatívnak, vagy mind a három pozitívnak, vagy mind a három érték 0-nak adódik. A DA_1B_1 háromszögből, felhasználva, hogy A_1B_1 az ABC háromszög középvonala, $A_1B_1 = C_1A = AB/2$,

$$\cos A_1DB_1\sphericalangle = \frac{DA_1^2 + DB_1^2 - A_1B_1^2}{2 \cdot DA_1 \cdot DB_1}.$$

Ennek előjele ugyanaz, mint az S számláló előjele, hiszen a nevező pozitív. Mármost

$$S = (DB^2 - A_1B^2) + (DC^2 - B_1C^2) - C_1A^2 = 2d^2 - \frac{1}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2),$$

és ez az előforduló betűkben szimmetrikus. Tehát a B_1DC_1 és C_1DA_1 szög cosinusának számlálója is S, az átfogalmazásunkban szereplő három cosinus érték csak a pozitív nevezőkben különbözik egymástól. Ebből már következik az átfogalmazott állítás, tehát az eredeti állítás is.

II. megoldás. A vektorok skaláris szorzatának alkalmazásával – lényegében az I. megoldás gondolatmenetét követve – még gyorsabban jutunk célhoz.

A D csúcsból indítsunk három egyenlő hosszú vektort az A, B és C csúcsok felé. Jelöljük ezeket rendre $2\mathbf{a}$, $2\mathbf{b}$, $2\mathbf{c}$-vel. Mivel $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = |\mathbf{c}|$, a feladatban szereplő szögfelezők irányába mutató vektorok $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{c}$ és $\mathbf{b}+\mathbf{c}$. A szögfelezők által bezárt szögek cosinusai:

$$\cos B_1DC_1 = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{c})}{|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}+\mathbf{c}|}, \qquad \cos C_1DA_1 = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{|\mathbf{a}+\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}+\mathbf{c}|},$$

és

$$\cos A_1DB_1 = \frac{(\mathbf{a}+\mathbf{c})(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{|\mathbf{a}+\mathbf{c}| \cdot |\mathbf{b}+\mathbf{c}|}.$$

A nevezők pozitívok. A számlálókban a beszorzást elvégezve rendre a következő kifejezéseket kapjuk:

$$\mathbf{a^2} + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$
$$\mathbf{b^2} + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$
$$\mathbf{c^2} + \mathbf{ab} + \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

Mivel $\mathbf{a^2} = \mathbf{b^2} = \mathbf{c^2}$, a kapott kifejezések egyenlők, így a feladat állítása az I. megoldás végén mondottak alapján igaz.

Hornung Tamás (Győr, Czuczor G. Bencés Gimn., III. o. t.)