I. megoldás. 1. Azt mutatjuk meg, hogy P_9-et a keresett A_{10} pontra tükrözve, visszakapjuk P-t. (Az biztos, hogy a P_9-et P-be vivő egybevágósági transzformáció tükrözés, hiszen minden egyes tükrözés – mint 180°-os elfordítás – a sík minden irányát a vele ellentétes irányba viszi át, ugyanígy páratlan számú tükrözés is, páros számú tükrözés pedig az eredeti irányba.)

Felhasználjuk azt a tételt (az I. osztályos tankönyvből), hogy a sík egy K alakzatát tükrözve egy C_1 centrumra, majd a kapott K_1 képet a C_2 centrumra, a K_{12} új tükörkép úgy is megkapható K-ból, hogy ezt eltoljuk a $2\cdot\overrightarrow{C_1C_2}$ vektorral.

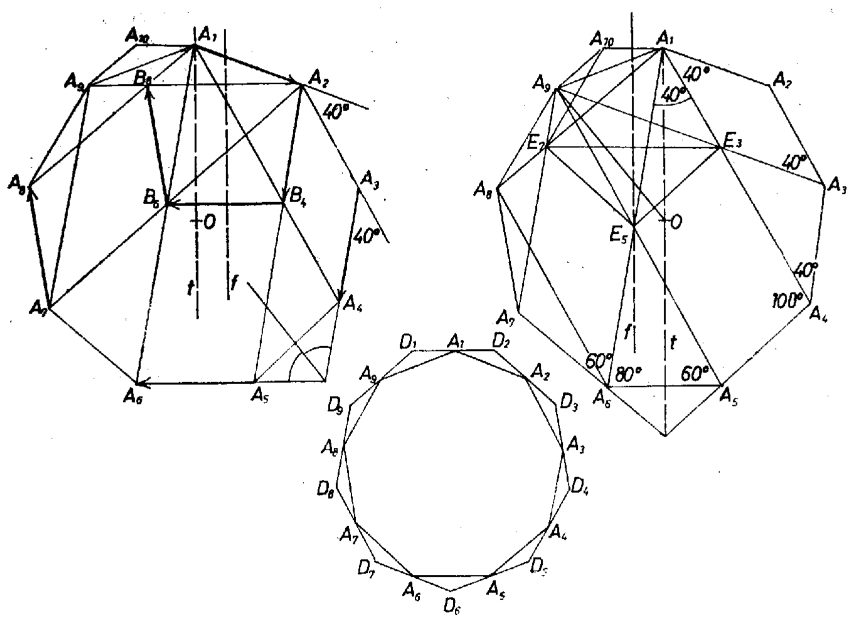
2. Ezt esetünkre alkalmazva azt kívánjuk, hogy

$$2(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_7A_8}+\overrightarrow{A_9A_{10}})=\overrightarrow{\mathbf{0}}$$

legyen (vagyis a zérus vektor). Ebből

$$-\overrightarrow{A_9A_{10}}=\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_7A_8}. \tag{1}$$

Itt az első két tag összege az az $\overrightarrow{A_1B_4}$, amelyre $\overrightarrow{A_2B_4}=$



Továbbmenve (1) első három tagjának összege az az $\overrightarrow{A_1B_6}$, melyre $\overrightarrow{B_4B_6}=\overrightarrow{A_5A_6}$. Itt B_6 egyrészt az A_1A_6 átlón van, hiszen $A_6B_6||A_5B_4$, az utóbbi egyenes azonos A_5A_2 vel és evvel az A_6 on át húzott párhuzamos átmegy A_1-en. Másrészt az A_2A_7 átlón is rajta van B_6, ugyanis A_2B_6 merőleges az $A_2B_6B_4$ egyenlő szárú háromszög B_4 ből induló szögfelezőjére, ami párhuzamos a szárak eltolásából adódó A_3A_4, illetve A_5A_6 egyenesek közti szög felezőjével, ez azonos P-nek A_9-ből induló szimmetriatengelyével, ami pedig merőleges A_2A_7-re, tehát A_2B_6 valóban azonos az A_2A_7 egyenessel.

Legyen (1) teljes jobb oldala az $\overrightarrow{A_1B_8}$, vagyis $\overrightarrow{B_6B_8}=\overrightarrow{A_7A_8}$, továbbá jelöljük a B_4B_6 és A_5A_6 szakasz felező merőlegesét f-fel, illetve t-vel. Ezek $\overrightarrow{B_4B_6}=\overrightarrow{A_5A_6}$ alapján párhuzamosak, és t a P-nek az A_1-en átmenő szimmetriatengelye. Így B_8 az A_2 tükörképe f-re, hiszen

$$B_6B_8\#A_7A_8=A_4A_3\#B_4A_2,$$

és az A_7A_8, A_4A_3 egyenesek egymás tükörképei t-re; és mivel A_2A_9 is merőleges f-re, azért B_8 az A_2A_9 en van. Továbbá rajta van az A_8A_1 en is, hiszen A_8-on át A_7B_6-tal, azaz A_7A_2-vel A_8A_1 az egyetlen párhuzamos.

Most már (1)-ben $\overrightarrow{A_1B_8}=-\overrightarrow{A_9A_{10}}$, vagyis $\overrightarrow{B_8A_1}=\overrightarrow{A_9A_{10}}$, a $B_8A_9A_{10}A_1$ négyszög paralelogramma,

$$A_{10}A_9||A_1A_8 \qquad \text{és} \qquad A_{10}A_1||A_9A_2,$$

más szóval A_{10} az A_1-en át A_1O-ra és A_9-en át A_9O-ra állított merőlegesek metszéspontja, ahol O a P kilencszög centruma.

II. megoldás. Ha már tudjuk (vagy legalább sejtjük), mit kell bizonyítanunk, gyorsabban jutunk célhoz a következő úton. Húzzuk meg az érintőt P körülírt köréhez P mindegyik csúcsában, és jelöljük a szomszédos csúcsokbeli érintők metszéspontját D_1-gyel, D_2-vel, $\ldots$, D_9-cel, ahol D_1 az A_9 és A_1-beli érintők közös pontja stb. (2. ábra). Ekkor a $D_1D_2\ldots D_8D_9$ kilencszög is szabályos, és az I. megoldás (1) egyenletéhez

$$\begin{aligned}
&2(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_7A_8})=\\
&2(\overrightarrow{A_1D_2}+\overrightarrow{D_2A_2}+\overrightarrow{A_3D_4}+\overrightarrow{D_4A_4}+\overrightarrow{A_5D_6}+\overrightarrow{D_6A_6}+\overrightarrow{A_7D_8}+\overrightarrow{D_8A_8})=\\
&(\overrightarrow{D_1D_2}+\overrightarrow{D_2D_3}+\overrightarrow{D_3D_4}+\overrightarrow{D_4D_5}+\overrightarrow{D_5D_6}+\overrightarrow{D_6D_7}+\overrightarrow{D_7D_8}+\overrightarrow{D_8D_9})=\\
&\overrightarrow{D_1D_9}=-2\overrightarrow{A_9D_1}.
\end{aligned}$$

Eszerint a keresett A_{10} tükrözési centruma azonos D_1-gyel.

Megjegyzések. 1. Az I. megoldáshoz hasonlóan jutunk célhoz a következő előkészítés után. Jelöljük a C_1, C_2, $\ldots$, C_k centrumokon való egymás utáni tükrözések eredményét $C_1C_2\ldots C_k$-val. Láttuk, hogy a C_1C_2 transzformáció a $2\cdot\overrightarrow{C_1C_2}$-ral való eltolás, a $C_1C_2C_3C_4$ pedig eltolás a $2(\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{C_3C_4}$-ral. Speciálisan, ha a $C_1C_2C_3C_4$ négyszög paralelogramma, akkor az eltolás $\overrightarrow{\mathbf{0}}$, az eredmény azonos a kiindulással, és ha az azonosságot 1-gyel jelöljük, akkor $C_1C_2C_3C_4=1$. Hasonlóan $C_1C_1=1$.

Feladatunkban azt az A_{10}-et keressük, amelyre

$$A_1A_2\ldots A_9A_{10}=1.$$

A követelményt úgy alakítjuk, hogy A_3 után beiktatjuk tényezőül az $E_3E_3=1$ szorzatot – ami nyilvánvalóan nem változtat –, majd A_5 és A_7 után E_5E_5-öt, illetve E_7E_7-et azzal az E_3, E_5 ponttal, amellyel az $A_1A_2A_3E_3$, az $E_3A_4A_5E_5$ és az $E_5A_6A_7E_7$ négyszög paralelogramma (3. ábra). A tényezők csoportosítása után elhagyjuk azokat az 1-es „tényezőket”, amelyek e paralelogrammák egymás utáni csúcsain való végigtükrözések eredményeiként adódnak:

$$\begin{gathered}
(A_1A_2A_3E_3)(E_3A_4A_5E_5)(E_5A_6A_7E_7)(E_7A_8A_9A_{10})=\\
1\cdot1\cdot1\cdot(E_7A_8A_9A_{10})=E_7A_8A_9A_{10}=1.
\end{gathered}$$

Eszerint A_{10} az a pont, amely az $E_7A_8A_9$ háromszöget paralelogrammává egészíti ki.

Az I. megoldáshoz hasonlóan adódik, hogy E_3, E_5 és E_7 rendre 2–2 átló metszéspontja, éspedig

$$\begin{array}{cccc}
E_3 & \text{az} \quad A_3A_9 & \text{és} & A_1A_4,\\
E_5 & \text{az} \quad A_5A_9 & \text{és} & A_1A_6,\\
E_7 & \text{az} \quad A_7A_9 & \text{és} & A_1A_8
\end{array}$$

metszése, és ekkor A_{10} az A_9-en át A_1A_8-cal és A_1-en át E_3E_7-tel húzott párhuzamosok metszése.

2. Az átlóknak az előbbi E-pontokkal való kettéosztásai lehetőséget adnak összefüggések felírására, P oldalának és átlóinak hosszai között.