Valamennyi felvételiző számára

1. Számítsa ki a következő kifejezés pontos értékét zsebszámológép, ill. függvénytáblázat használata nélkül:

$$\frac{5\cdot 8^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{16\pi}{3}\right)^3}{\log_4 2}.$$

(9 pont)

2. Az $ABCD$ paralelogramma A és B csúcsai: $A(1;\ 4)$ és $B(6;\ 6)$. A BC oldalegyenes egy pontja $P(10;\ 18)$, a CD oldalegyenes egy pontja $R(-1;\ 11)$. Mekkora a paralelogramma kerülete?

(11 pont)

3. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának hossza 36, szárainak hossza 30. Mekkora a háromszög súlypontjának a háromszög köré írt kör középpontjától mért távolsága?

(12 pont)

4. Határozza meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen értelmezhető az alábbi kifejezés:

a) $\dfrac{\sqrt{x^2+4x-5}}{|x+2|-3}$; (8 pont)

b) $\lg(1-\sin\ 2x)$. (5 pont)

5. Egy háromoldalú gúla alaplapja szabályos háromszög, oldallapjai egybevágó, egyenlő szárú háromszögek. Az egyik oldalélen átmenő és ezzel szemközti alapélre merőleges síkmetszet területe 150 cm^2. A gúla térfogata 1500 cm^3. Mekkora szöget zár be egy-egy oldallap az alaplappal?

(13 pont)

Gimnazisták számára ajánlott

6. Ábrázolja a derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a $P(x;\ y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátái kielégítik a következő feltételt:

a) $|x|\leqq|y|$; (5 pont)

b) $|x+1|+|y+1|\leqq 2$. (8 pont)

7. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4;$$
$$\log_4 x-\log_4 y=1.$$

(14 pont)

8. Legyen O a sík valamely pontja, továbbá $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ és $\overrightarrow{OC}$ a síknak olyan egységvektorai, hogy az O pont az A, B, C pontok által meghatározott háromszögön kívül helyezkedik el! Bizonyítsa be, hogy

$$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|>1.$$

(15 pont)

Szakközépiskolások számára ajánlott

6. Oldja meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:

$$2\ \log_x\left(\frac{1}{4}\right)+\log_4\left(\frac{1}{x}\right)\leqq -3.$$

(13 pont)

7. Az ABC háromszög AA_1 súlyvonala merőleges AB-re. Jelöljük a háromszög BC, CA és AB oldalainak hosszát rendre a-val, b-vel és c-vel! Fejezze ki a CAB szög koszinuszát b és c, a BCA szög koszinuszát pedig a és b függvényeként!

(14 pont)

8. Legyenek a és b olyan valós számok, hogy $a>b$ és $ab=1$. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}\geqq 2\sqrt{2}.$$

(15 pont)