

Előrebocsátjuk, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség a kitűzött formában nem mindig áll fenn, de ha a kisebb jel helyett a kisebb egyenlőt írjuk, akkor az így nyert egyenlőtlenség már mindig helyes. Ezt fogjuk bizonyítani.

A rekurzív definíció alapján az  $y_0, y_1, \dots, y_n$  számok egyértelműen meghatározzák az  $x_0, x_1, \dots, x_n$  számokat, de fordítva is: az  $x_0, x_1, \dots, x_n$  számok segítségével egyértelműen kifejezhetők az  $y_0, y_1, \dots, y_n$  számok, mégpedig a következőképpen:

$$y_0 = x_0$$

$$y_i = x_i - \frac{1}{2}x_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

A bizonyítandó egyenlőtlenség ennek alapján így alakul:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 4 \left[ x_0^2 + \left( x_1 - \frac{1}{2}x_0 \right)^2 + \dots + \left( x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} \right)^2 \right].$$

A jobb oldalon a kéttagúak négyzetre emelését és a 4-gyel való beszorzást, valamint a lehetséges összevonásokat elvégezve:

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 5x_0^2 + 5x_1^2 + \dots + 5x_{n-1}^2 + 4x_n^2 - 4x_0x_1 - 4x_1x_2 - \dots - 4x_{n-1}x_n.$$

Az egyenlőtlenség bal oldalát 0-ra redukálva:

$$0 \leq 4x_0^2 + 4x_1^2 + \dots + 4x_{n-1}^2 + 3x_n^2 - 4x_0x_1 - 4x_1x_2 - \dots - 4x_{n-1}x_n.$$

A tagokat igyekszünk úgy csoportosítani, hogy csupa négyzetes tag összege szerepeljen.

$$0 \leq 2x_0^2 + (2x_0^2 - 4x_0x_1 + 2x_1^2) + \dots + (2x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}x_n + 2x_n^2) + x_n^2,$$

azaz

$$0 \leq 2x_0^2 + 2(x_0 - x_1)^2 + \dots + 2(x_{n-1} - x_n)^2 + x_n^2.$$

Látható, hogy a kapott egyenlőtlenség mindig igaz.

Mivel csupa megfordítható átalakítást végeztünk, az eredeti

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 4(y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha  $x_0 = 0$ ,  $x_{i-1} - x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $x_n = 0$ ; vagyis ha minden  $i$ -re  $x_i = 0$ .

Ekkor ugyancsak minden  $i$ -re:  $y_i = 0$ .