I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

1. Egy céllövölde használati díját úgy állapították meg, hogy jelentkezésnél mindenki fizet 5 Ft belépődíjat, lövésenként pedig 1,5 Ft-ot. A konkurens cég belépődíja 15 Ft, de itt 50 fillérbe kerül egy lövés. Melyik pavilont részesítenéd előnyben, ha 4, 8 vagy 12 alkalommal szeretnél lőni? Hány lövés esetén részesítenéd előnyben az egyik, ill. a másik pavilont?

2. Egy kétjegyű szám elé, majd mögé kettest írtam. Így háromjegyű számokat kaptam. A két háromjegyű szám különbsége 81. Melyik számra gondoltam?

3. Az $ABCD$ téglalap oldalaira $\overline{AB} = \overline{3AD}$. Az $\overline{AB}$ szakaszt három egyenlő részre osztjuk az M és N pontokkal. Határozzuk meg a következő szögösszeget:
$AMD\sphericalangle + AND\sphericalangle + ABD\sphericalangle$!

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet

$$\big|1 - |x + 1|\big| = x - [x].$$

(Az $[x]$ jelenti az x-nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat!)

5. Adott egy paralelogramma. Tekintsük az összes olyan négyzetet, amelynek csúcsai a paralelogramma különböző oldalegyeneseire esnek. Hol helyezkednek el a négyzetek szimmetriaközéppontjai?

6. Melyek azok az n és k természetes számok, amelyekre

$$n \cdot k = 10 \cdot |n - k|?$$

7. Négyzetrácsos füzetlapon a négyzetoldalak hosszát tekintsük egységnyinek. Rajzoljunk rá egy téglalapot, melynek csúcsai rácspontokra illeszkednek és oldalai nem párhuzamosak rácsegyenesekkel. Igaz-e, hogy minden esetben egész szám az ilyen téglalap területe? (Először négyzetre oldjuk meg a feladatot.)

8. Határozzuk meg $1986^{1987} + 1987^{1986}$ 10-nél kisebb pozitív osztóit!

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) versenye

1. Oldjuk meg:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 = 2y$$
$$|x| = 1 - y^2.$$

2. Egy kétjegyű számot megszorozva a jegyei felcserélésével nyerhető kétjegyű számmal, 3627-et kaptunk eredményül. Melyik ez a kétjegyű szám?

3. Adott egy O_1 középpontú k_1 kör és egy O_2 középpontú k_2 kör úgy, hogy k_2 áthalad O_1-en. Az O_2O_1 egyenes két pontban metszi a k_1 kört, az O_2-től távolabbi metszéspontja legyen M. A k_1 és k_2 kör az A és B pontokban metszi egymást. Tudjuk, hogy az MAO_2B négyszög rombusz. Mekkorák a szögei?

4. Egy háromszögbe téglalapot írtunk úgy, hogy a téglalap négy csúcsa a háromszög kerületén van. Tudjuk, hogy a téglalap középpontja és a háromszög súlypontja egybeesik. Számítsuk ki a téglalap és a háromszög területének arányát!

5. Bizonyítsuk be, hogy $1987^{1987} - 1987$ osztható 36-tal!

6. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezője kisebb, mint az ugyanabból a csúcsból kiinduló két oldalának mértani közepe!

7. Adott n db egész szám, melyek szorzata n, összegük 0. Bizonyítsuk be, hogy n 4-gyel osztható!

8. Legyenek $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ egymástól különböző, egynél nagyobb természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{a_1^2}\right)\left(1 - \frac{1}{a_2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{a_n^2}\right) > \frac{1}{2}.$$

II. forduló

Kezdők (I. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Melyek azok a különböző számjegyekből álló hatjegyű számok, melyeknek számjegyei – valamilyen sorrendben – 1, 2, …, 6, és az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható kettővel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható hárommal, és így tovább, és maga a szám osztható hattal?

2. Legyen egy trapéz egyik szárának végpontja P és Q. A P és Q csúcsoknál lévő belső szög szögfelezői a szemközti szár F felezési pontjában metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe $PF \cdot FQ$!

3. Oldja meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{2x+2}{x^2+3x+2} \geqq -1.$$

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Bizonyítsa be, hogy a konvex négyszöget két középvonala négy olyan négyszögre bontja, melyek közül a két–két szemközti négyszög területének összege egyenlő!

2. Az x, y, z valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=1.$$

Igazolja, hogy a három tört közül valamelyik kettő értéke 1!

3. Az $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2000$ számokat valamilyen sorrendben egymás mellé írva egy új számot képeztünk. Lehet-e az így kapott szám négyzetszám?

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Az x, y, z valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}+\frac{z^2+x^2-y^2}{2zx}+\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}=1.$$

Igazolja, hogy a három tört közül valamelyik kettő értéke 1!

2. Adott a térben négy különböző pont. Határozza meg azokat a síkokat, amelyek a négy pont mindegyikétől egyenlő távolságra vannak!

3. Helyezzünk el egy kör kerületén n pontot, és számozzuk meg ezeket tetszőleges sorrendben az 1-től n-ig terjedő sorszámokkal! Azt mondjuk, hogy két pont, A és B összeköthető, ha nem szomszédosak, továbbá az A és B pontokat összekötő körívek közül legalább az egyiken csak olyan pontok helyezkednek el, melyek sorszáma A sorszámánál és B sorszámánál is kisebb. Igazoljuk, hogy az összeköthető pontpárok száma $n-3$.

Haladók (II. Osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Az alábbi ábra egy telek alaprajzát ábrázolja: a karikák gyümölcsfákat jelölnek.

1987-11-357-1.eps

Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár a tőle észak–déli vagy kelet–nyugati irányban álló egyik legközelebbi fára repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

2. Egy ABC háromszög ($AC \neq BC$) beírt körének középpontja O. Az AO egyenes K, a BO egyenes M pontban metszi a szemközti oldalt. Mekkora a háromszög C csúcsánál lévő szöge, ha $OM = OK$?

3. Mekkora kerületű a koordinátasíkon azon $(x;\ y)$ pontok halmaza, melyek koordinátáira teljesülnek a következők:

(1) $$|x| \leqq 3,$$

(2) $$y^2-3x^2+2y \geqq -1,$$

(3) $$y^2 \leqq 4?$$

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. A sík két pontját szomszédosnak nevezzük, ha távolságuk nem nagyobb 1 egységnél. Egy pont önmagának nem szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy a sík négy olyan pontja, melyek mindegyikének a fennmaradó három közül legalább kettő szomszédja, mindig lefedhető egy egységnyi sugarú körlappal!

2. Bizonyítsuk be, hogy 1-től 1 000 000-ig több olyan egész szám van, amely előáll két négyzetszám összegeként, mint amely két pozitív köbszám összegeként írható fel!

3. Legyen n pozitív egész szám. Az $\{a,\ b,\ c\}$ számhármast „jónak” nevezzük, ha az $|a-b|$, $|b-c|$, $|c-a|$ értékek valamilyen sorrendben $1,\ n,\ n+1$. Be lehet-e osztani az összes egész számot páronként közös elem nélküli „jó” hármas csoportokba?

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. A sík két pontját szomszédosnak nevezzük, ha távolságuk nem nagyobb 1 egységnél. Egy pont önmagának nem szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy a sík négy olyan pontja, melyek mindegyikének a fennmaradó három közül legalább kettő szomszédja, mindig lefedhető egy egységnyi sugarú körlappal!

2. Hány $(x,\ y)$ valós számpárra teljesül, hogy

$$x^2-xy+1=0$$

és

$$x^2-2xy+2y^2+2x-3y-1\leqq 0?$$

3. Legyenek n, k és d olyan egész számok, melyekre $1\leqq d\leqq k\leqq n-2$. Vegyünk fel a körvonalon n különböző pontot. Nevezzünk k szomszédos pontot „k hosszúságú ív”-nek. – Hogyan kell kiválasztanunk a lehetséges n darab, k hosszúságú ív közül d különbözőt, hogy közös pontjaiknak száma a lehető legnagyobb legyen?