## Első forduló

### I. és II. Kategória

**1.** Egy forgáshenger alakú edényben, amelynek alapköre $R$ sugarú, $h$ magasságig víz van. Az edénybe annyi $r$ sugarú golyót dobunk, amennyi csak elfér egy rétegben.

Bizonyítsuk be, hogy ha $h \geqq \frac{2}{3} r$, akkor a víz nem lepi el teljesen a golyókat!

(Feltételezzük, hogy a víz felszíne párhuzamos a henger alapkörének síkjával és $r < R$.)

**2.** Ha a $3x^2 - 2x + 5$ polinomban az $x$ helyébe egy másik polinomot helyettesítünk, akkor a $12x^4 + 56x^2 + 70$ polinomot kapjuk.
Mennyi az $x$ helyébe helyettesített polinom együtthatóinak összege?

**3.** Bizonyítsuk be, hogy egy 8 cm oldalú négyzet belsejében tetszés szerint elhelyezett 33 pont közül mindig kiválasztható 3 pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe nem nagyobb 2 cm$^2$-nél!

**4.** Az $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ és $a_5$ valós számok – a felírt sorrendben – egy számtani sorozat egymást követő elemei. Az $a_1$ és $a_5$ az

$$a_2 x^2 + a_3 x + a_4 = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei.
Melyek ezek a valós számok?

**5.** Tekintsük azt a téglalapot, amelynek csúcspontjai egy derékszögű koordináta–rendszerben a (0; 0), (50; 0), (50; 53) és a (0; 53) pontok!
Határozzuk meg azoknak a rombuszoknak a számát, amelyeknek csúcspontjai a megadott téglalap belsejébe vagy határára esnek, valamennyi csúcspontjuk mindkét koordinátája egész szám, és átlóik párhuzamosak a szóban forgó téglalap oldalaival!

**6.** Határozzuk meg az összes olyan $x$ és $y$ természetes számot (a 0-t is beleértve), amelyek kielégítik az

$$5^{2x} - 3 \cdot 2^{2y} + 5^x \cdot 2^{y-1} - 2^{y-1} - 2 \cdot 5^x + 1 = 0$$

egyenletet!

### III. és IV. Kategória

**1.** Egy egyenes körhenger felszínének és térfogatának mérőszáma egyenlő. Mekkora a henger sugara és magassága, ha mindkettő mérőszáma páros egész szám?

**2.** Az $ABCD$ téglalapból úgy vágtuk ki az $AXY$ szabályos háromszöget, hogy $X$ a $BC$, $Y$ pedig a $CD$ oldalon van. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapból megmaradó három derékszögű háromszög közül kettő területének összege a harmadik területével egyenlő!

**3.** Állapítsuk meg az

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(b-x)^2 + c^2}$$

függvény minimumát, ha $a$, $b$, $c$ adott pozitív valós számok!

**4.** A $C$ csúcsú $\gamma$ szög egyik szárára mérjük fel a $CA$, másik szárára a $CB$ szakaszt úgy, hogy a $CA + CB$ összeg egy adott szakasszal legyen egyenlő ($0 < \gamma < 180°$).
Bizonyítsuk be, hogy $A$ és $B$ összes lehetséges helyzeténél az $ABC$ háromszögek köré írt köreinek $C$-n kívül van még egy közös pontja!

**5.** Bizonyítsuk be, hogy
*a)* megadható 1324 olyan 1987-nél kisebb különböző pozitív egész, amelyek között nincs három egymáshoz páronként relatív prím;
*b)* akárhogyan adunk is meg 1325 különböző 1987-nél kisebb pozitív egész számot, szükségképpen lesz közöttük három egymáshoz páronként relatív prím!

## A második (döntő) forduló feladatai

### I. kategória

**1.** A Mathlon olyan verseny, amely $M$ különféle atlétikai számból áll. Egy ilyen versenyen hárman vettek részt, $A$, $B$ és $C$. Mindegyik versenyszámban az első helyezett $p_1$ pontot, a második $p_2$ pontot, a harmadik $p_3$ pontot kapott.
$p_1$, $p_2$, $p_3$ a $p_1 > p_2 > p_3 > 0$ feltételt kielégítő egész számok. (Holtverseny egyik versenyszámban sem fordult elő.)

A versenyen $A$ 22, $B$ és $C$ egyaránt 9–9 pontot szerzett. A 100 m-es síkfutást $B$ nyerte. Mennyi $M$, és ki volt a második magasugrásban?

**2.** Oldja meg a következő egyenletet a pozitív egész számok halmazán!

$$xyz + xz + yz - xy - x - y + z = 1986.$$

**3.** Egy háromszög $a$ oldala 4 egység, $\cos\ \alpha = \frac{1}{3}$ és a háromszög köré írt kör sugara legfeljebb 4 egység.

Tudjuk, hogy a háromszög minden oldalának mérőszáma egész szám. Határozza meg a $b$ és $c$ oldal hosszát!

## II. kategória

**1.** $N$ olyan szám, amelyről a következőket tudjuk:

*a)* $N$ egy természetes szám négyzete;

*b)* $N$ a tízes számrendszerben olyan négyjegyű szám, amelynek minden jegye kisebb 7-nél;

*c)* ha $N$ mindegyik számjegyét növeljük 3-mal, akkor ismét egy természetes szám négyzetét kapjuk.

Melyik ez az $N$ szám?

**2.** Jelölje $a$, $b$, $c$ valamely háromszög oldalainak hosszát, továbbá rendre $A$, $B$, illetve $C$ ebben a háromszögben a megadott oldalakkal szemben lévő szögek mérőszámát!

Bizonyítsuk be, hogy ha

$$ab^2 \cos A = bc^2 \cos B = ca^2 \cos C,$$

akkor a háromszög egyenlő oldalú!

**3.** Igaz-e, hogy ha $u$ és $v$ olyan két valós szám, amelyekre $u$, $v$ és $uv$ egy racionális együtthatójú, harmadfokú polinom három gyöke, akkor $uv$ racionális?

## III. kategória

**1.** Egy háromszög oldalainak hossza 3, 4 és 5. Hány olyan egyenes létezik, amely a háromszöget úgy vágja ketté, hogy a két rész egyenlő kerületű és egyenlő területű is?

**2.** Nevezzük el tüskés kockának azt a testet, amit úgy kapunk, hogy a kocka minden lapjára kifelé egybevágó szabályos négyoldalú gúlákat állítunk; a kocka lapjai a gúlák alaplapjai. Mekkora lehet maximálisan a 2-es élhosszúságú kockából származtatott tüskés kocka térfogatának és felszínének aránya?

Bizonyítsuk be, hogy a maximumot adó test élei egyenlők!

Kitölthető-e a tér a maximumot adó egybevágó testekkel egyrétűen és hézagtalanul, azaz úgy, hogy a tér minden pontját legalább egy test a belsejében vagy a határán tartalmazza és két testnek nincs közös belső pontja?

**3.** Az $f$ függvény a $[0;\,1]$ intervallumban van értelmezve, és ha $x_1 \neq x_2$, akkor

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|,$$

továbbá $f(0) = f(1) = 0$.

Bizonyítsuk be, hogy az értelmezési tartomány bármely $x_1$, $x_2$ értékpárjára teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}.$$

## IV. kategória

**1.** Egy természetes számot csupaegynek hívunk, ha tízes számrendszerbeli felírásában minden számjegye 1-es (pl. 11, 111, 11111, csupaegy, de 101 nem az).

Mely $m$ természetes számokra létezik $m$ darab csupaegy úgy, hogy ezek mind különböző maradékot adnak $m$-mel osztva?

**2.** A $[0;\,1]$ intervallumon értelmezett folytonos $f$ függvényre $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, továbbá minden $0 < x < 1$ értékhez van olyan $h$, hogy $0 \leqq x - h < x + h \leqq 1$ és

$$f(x) = \frac{f(x-h) + f(x+h)}{2}.$$

Igazoljuk, hogy $f(x) = x$ minden $0 < x < 1$-re!

**3.** Legyenek egy háromszög csúcsai $A_1$, $A_2$, $A_3$, a súlypontja $S$.

Messék az $A_1S$, $A_2S$, $A_3S$ egyenesek a háromszög köré írt kört másodszor a $B_1$, $B_2$, $B_3$ pontokban. Igazolja, hogy

$$SB_1 + SB_2 + SB_3 \geqq A_1S + A_2S + A_3S!$$