Az idei OKTV első fordulójában szerepelt a következő feladat :

Bizonyítsuk be, hogy egy 8 cm *oldalú négyzet belsejében tetszés szerint elhelyezett* 33 *pont közül mindig kiválasztható* 3 *pont úgy, hogy az általuk meghatározott háromszög területe nem nagyobb* 2 cm^2*-nél.*

A feladat megoldása a skatulya-elv szokványos alkalmazásán múlik: ha felosztjuk a 8×8-as négyzetet 16 db 2×2-es négyzetre, akkor lesz olyan kis négyzet, melybe (határát is beleértve) legalább 3 adott pont esik. Ezután már csak azt kell igazolni, hogy egy adott négyzetbe írt háromszög területe nem haladja meg a négyzet területének felét; ez az állítás négyzet helyett paralelogrammára is igaz, és bizonyítása igen egyszerű.

A bizonyítás nem működik, ha 33-nál kevesebb pont van adva a négyzetben, ugyanakkor – némi próbálgatás után – érezhetjük, hogy 33-nál jóval kevesebb pontot sem tudunk úgy elhelyezni, hogy ne legyen 2-nél nem nagyobb területű háromszögünk. Az alábbiakban a fenti megoldástól eltérő módszerrel megmutatjuk, hogy az állítás már 23 pont esetén is igaz. Bár valószínűleg még ez az érték is messze van a pontos határtól, a bizonyítás talán nem érdektelen, és szemben a fenti, tisztán kombinatorikus okoskodással, feltehetően tovább finomítható.

Jelöljük s-sel a négyzetben elhelyezett pontok számát, és ezek konvex burka legyen k-szög, melynek oldalai a_1, a_2, $\ldots$, a_k, szögei , α_1, α_2, $\ldots$, α_k (az a_i, a_{i+1} oldalak szöge α_i). Tegyük fel, hogy bármely 3 pont által meghatározott háromszög területe 2-nél nagyobb. Ennek felhasználásával felső becslést adunk k-ra.

Közismert, hogy ha egy sokszög a belsejében tartalmaz egy konvex sokszöget, akkor az utóbbi kerülete a kisebb. Mivel a négyzet kerülete 32, így

$$32 \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_k. \tag{1}$$

A konvex burok bármely három szomszédos csúcsa egy háromszöget határoz meg, amelynek területe – feltevésünk szerint – 2-nél nagyobb. Ezért

$$\frac{1}{2}a_i a_{i+1}\sin\alpha_i > 2 \quad (i = k \text{ esetén } a_{i+1} = a_1). \tag{2}$$

Felhasználva a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget

$$\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \geqq \sqrt{a_i a_{i+1}} > \sqrt{\frac{4}{\sin\alpha_i}}, \quad \text{innen pedig } a_i + a_{i+1} > \frac{4}{\sqrt{\sin\alpha_i}}.$$

(Itt használtuk, hogy $\sin\alpha_i \neq 0$, hiszen $\sin\alpha_i = 0$ mellett van elfajuló, azaz 0 területű háromszög is.) Összegezve ezt $i = 1, 2, \ldots, k$-ra:

$$2(a_1 + \ldots + a_k) > 4\left(\frac{1}{\sqrt{\sin\alpha_1}} + \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha_k}}\right). \tag{3}$$

A jobb oldal további becsléséhez felhasználjuk a *Jensen*-egyenlőtlenséget. (Ennek az igen hasznos és széles körben használható egyenlőtlenségnek a bizonyítása megtalálható pl. *Molnár Emil: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye* c. könyvének 516–520 oldalán.)

Tekintsük az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\sin x}}$ függvényt a $(0;\pi)$ intervallumban.

Könnyen igazolható, hogy f itt konvex, így a Jensen-egyenlőtlenséget alkalmazva

$$f\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}{k}\right) \leqq \frac{f(\alpha_1) + \ldots + f(\alpha_k)}{k},$$

vagyis

$$\frac{k}{\sqrt{\sin\frac{(k-2)\pi}{k}}} \leqq \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha_1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha_k}}.$$

Ezt (3)-ban felhasználva

$$2(a_1 + \ldots + \alpha_k) > \frac{4k}{\sqrt{\sin\frac{(k-2)\pi}{k}}} = \frac{4k}{\sqrt{\sin\frac{2\pi}{k}}},$$

így (1) szerint

$$64 > \frac{4k}{\sqrt{\sin\frac{2\pi}{k}}}.$$

Ha $k \geqq 3$, akkor a kapott egyenlőtlenség jobb oldala szigorúan monoton nő, és ha $k = 12$, akkor már nagyobb, mint 64.

Eszerint $k \leqq 11$, azaz, ha egy 8 cm oldalú négyzetben adott pontok közül bármely három által meghatározott háromszög területe nagyobb, mint 2, akkor a pontok konvex burka legfeljebb 11 -oldalú sokszög lehet.

1987-05-198-1.eps

Osszuk fel ezután az adott pontok konvex burkát háromszögekre úgy, hogy a felosztásban részt vevő háromszögek mindegyikének csúcsai az adott pontok közül valók legyenek, és semelyik háromszög ne tartalmazzon a belsejében további megadott pontot (lásd az ábrát).

Jelölje N az így keletkező háromszögek számát. E háromszögek szögeinek összege, $N\pi$, egyenlő a konvex burok szögeinek és a belső pontok körüli teljesszögek összegével, azaz

$$(4) \quad N\pi = (k-2)\pi + (s-k)\cdot 2\pi, \text{ ahonnan}$$

$$N = 2s - k - 2 \quad (s \text{ a pontok száma volt}).$$

Feltevésünk szerint a felosztásban szereplő háromszögek mindegyike 2 egységnél nagyobb területű, másfelől területük összege, a konvex burok területe nyilván kisebb a négyzet területénél, ami 64.

Így $2N < 64$, azaz $N \leqq 31$. (4)-et és a k-ra kapott eredményt fölhasználva

$$31 \geqq 2s - k - 2 \geqq 2s - 11 - 2 = 2s - 13, \text{ azaz } 22 \geqq s.$$

Ezzel igazoltuk, hogy ha a háromszögek mindegyike 2-nél nagyobb területű, akkor az adott pontok száma legfeljebb 22.