1. Bizonyítsuk be. hogy három egy pontból induló félegyenes akkor és csak akkor tartalmazhatja egy téglatest három lapátlóját, ha a félegyenesek páronként hegyesszöget zárnak be és ezek összege $180°$.

1. megoldás. Először is megmutatjuk, hogy a félegyenesek közös pontja csak a téglatest valamelyik csúcsa lehet. Mivel egy lapnak két átlója van, a három átló közül legalább kettőnek különböző lapokon kell lennie. Két ilyen átló nem lehet szemben fekvő lapokon, mert azok síkjai párhuzamosak, s így a rajtuk levő egy-egy egyenesnek nincs közös pontja. Két szomszédos lapon levő egyenesek csak a lapok metszésvonalán metszhetik egymást, két lapátló tehát csak úgy, ha egyik végpontjuk közös, vagyis a tégla egy csúcsa. Ekkor viszont a harmadik félegyenesen levő átló csak a kérdéses csúcsban találkozó harmadik oldallapnak a csúcsból induló átlója lehet.

1987-02-051-1.eps

1. ábra

Jelöljük a téglatest csúcsait $A,\ B,\ C,\ D,\ A^{'},\ B^{'},\ C^{'},\ D^{'}$-vel az 1. ábra szerint, és tekintsük az A csúcsból induló lapátlókat. Jelöljük az $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AA^{'}}$ vektorokat $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$-vel, hosszukat $a,\ b,\ c$-vel. Ekkor az átlók irányába mutató vektorok:

$$\mathbf{e}=\overrightarrow{AC}=\mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{f}=\overrightarrow{AB^{'}}=\mathbf{a}+\mathbf{c},\quad \mathbf{g}=\overrightarrow{AD^{'}}=\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

Két félegyenes akkor zár be hegyesszöget, ha az irányukba mutató vektorok skaláris szorzata pozitív. Esetünkben, mivel az $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$ vektorok páronként merőlegesek egymásra,

$$\mathbf{ef}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}+\mathbf{c})=\mathbf{a}^2+\mathbf{ac}+\mathbf{ba}+\mathbf{bc}=a^2>0,$$

tehát az AC és $AB^{'}$ átlók közt hegyesszög van. Hasonlóan látható be, hogy a másik két átlópár is hegyesszöget zár be.

A szögek összegének megállapításához belátjuk, hogy a három átló közötti szögek megegyeznek pl. az $ACD^{'}$ háromszög belső szögeivel. Ebből természetesen következik, hogy összegük $180°$.

$$B^{'}AD^{'}\sphericalangle=CD^{'}A\sphericalangle,$$

mert Pitagorasz tételéből

$$B^{'}D^{'2}=a^2+b^2=AC^2\quad\text{és}\quad CD^{'2}=a^2+c^2=AB^{'2},$$

tehát az $ACD^{'}$ és a $D^{'}B^{'}A$ háromszög megfelelő oldalai egyenlők, s így a háromszögek egybevágók. Felhasználva még a

$$B^{'}C^2=b^2+c^2=AD^{'2}$$

egyenlőséget is, kapjuk, hogy az $ACD^{'}$ és $CAB^{'}$ háromszögek is egybevágók, amiből következik, hogy

$$ACD^{'}\sphericalangle=CAB^{'}\sphericalangle.$$

Ezzel állításunkat bebizonyítottuk.

Most megmutatjuk, hogy ha $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ olyan hegyesszögek, amelyek összege $180°$, akkor van olyan téglatest, amelyiknek az egyik csúcsából induló lapátlók közti szögek $\alpha,\ \beta$, illetőleg γ.

Rajzoljunk olyan háromszöget, amelyiknek a szögei $\alpha,\ \beta$, illetőleg γ. Ilyen van, mert a szögek összege $180°$. Legyen az $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ szöggel szemközti oldal hossza $e,\ f$, illetőleg g. Ekkor egy olyan téglatest $a,\ b,\ c$ éleire, amelyiknek három lapátlója az adott szögeket zárja be, az

$$a^2+b^2=e^2,\quad a^2+c^2=f^2,\quad b^2+c^2=g^2 \tag{1}$$

egyenletrendszernek kell teljesülnie. Ennek megoldása :

$$a=\sqrt{(e^2+f^2-g^2)/2},\quad b=\sqrt{(e^2+g^2-f^2)/2},\quad c=\sqrt{(f^2+g^2-e^2)/2}.$$

A gyökjelek alatt pozitív számok állnak, mert a koszinusztétel szerint ezek az értékek

$$ef\,\cos\gamma,\quad eg\,\cos\beta,\quad fg\,\cos\alpha, \tag{2}$$

és ezek a szögek hegyes volta miatt pozitívak.

Szerkesszünk ezekkel az élhosszúságokkal $ABCDA'B^{'}C^{'}D^{'}$ téglatestet. Az 1. ábra jelöléseit használva az A csúcsból induló $AC,\ AB^{'},\ AD'$ lapátlók hosszára ekkor rendre az (1) alatti értékek adódnak. Az átlókat vektoroknak tekintve páronkénti skaláris szorzataikra viszont a (2) alatti értékeket kapjuk, hiszen pl.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB^{'}}=a^2=(e^2+f^2-g^2)/2=ef\cos\gamma.$$

Itt felhasználtuk a megoldás elején végzett számítást is. Mivel a cosinus függvény $0°$ és $180°$ közt minden 1 és -1 közti értéket csak egyszer vesz fel, ez csak úgy lehet, ha a lapátlók szöge rendre γ, β és α. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A versenyzők nagy része számításon keresztül oldotta meg a feladatot, ezért választottunk elsőnek egy számításon alapuló megoldást. Akadtak olyanok is, akik a

$$\cos\Big((\mathbf{e},\,\mathbf{f})\sphericalangle + \Big(\mathbf{f},\,\mathbf{g})\sphericalangle + (\mathbf{e},\,\mathbf{g})\sphericalangle\Big) = -1,$$

vagy a

$$\cos\Big((\mathbf{e},\,\mathbf{f})\sphericalangle + (\mathbf{f},\,\mathbf{g})\sphericalangle\Big) = -\cos(\mathbf{g},\,\mathbf{e})\sphericalangle$$

egyenlőség igazolásával látták be, hogy a szögek összege $180°$.

2. Annak a belátására, hogy bármely 3 hegyesszöghöz, amelyeknek az összege $180°$, van olyan téglatest, amelynek 3 lapátlója közti szögek éppen az adottak, azt bizonyítottuk be, hogy minden hegyesszögű háromszöghöz található a térben olyan pont, amelyiket a csúcsokkal összekötő egyenesek páronként merőlegesek. Lényegében ennek a bizonyítását kívánta az 1938. évi Eötvös verseny 3. feladata.*[1]

3. A szögösszegre vonatkozó bizonyítás során azt láttuk be, hogy az $AB'CD'$ tetraéder kitérő élpárjai egyenlő hosszúak. Igy az oldallapok egybevágó háromszögek. Az ilyen tetraédereket egyenlőoldalúnak nevezik. Ezek a szabályos tetraédernél kevésbé speciálisak, mégis rendelkeznek a szabályos háromszögek számos tulajdonságának a térbeli megfelelőjével.

A feladat megoldható számolás nélkül, amint a további megoldások mutatják. Nem bizonyítjuk újra, hogy a félegyeneseknek a tégla egy csúcsából kell indulniuk. Ennek bizonyítása egyébként nem igényelt számítást.

II. megoldás. Belátjuk, hogy a $CAD'\sphericalangle$ hegyesszög. Forgassuk a CAD' háromszöget CD' oldala körül a CDD' síkba; jelöljük A új helyzetét A_1-gyel. (2. ábra).

1987-02-053-1.eps

2. ábra

D a CA_1D' háromszög belsejében lesz, ugyanis az A csúcs egy CD'-re bocsátott merőleges síkban mozog forgatás közben. Ennek a síknak az E metszéspontja a CD' egyenessel a CD' szakasz belsejében van, mert A merőleges vetülete, D, rajta van a CDD' sík és a merőleges sík metszésvonalán, az A_1E egyenesen; így DE a CDD' derékszögű háromszög D-ből húzott magassága, talppontja tehát az átfogó belsejére esik. Mivel az ADE háromszög AE átfogója nagyobb a DE befogónál, így D az A_1E szakaszon van. Ekkor azonban

$$CDE\sphericalangle > CA_1E\sphericalangle \quad \text{és} \quad EDD'\sphericalangle > EA_1D'\sphericalangle,$$

mert a bal oldalon a CA_1D, ill. a DA_1D' háromszög D-nél levő külső szöge áll, a jobb oldalon viszont az A_1 csúcsnál fekvő belső szög. A megfelelő oldalakat összeadva :

$$90° = CDE\sphericalangle + EDD'\sphericalangle > CA_1E\sphericalangle + EA_1D'\sphericalangle = CA_1D'\sphericalangle,$$

és ezt akartuk bizonyítani. Hasonlóan látható be, hogy a másik két átlópár is hegyesszöget zár be.

Az $AB'CD'$ tetraéder egyenlőoldalú, mert az AB', CD'; $B'C$, $D'A$; AC, $B'D'$ szembenfekvő élpárok a tégla két-két szembenfekvő lapjának egy-egy átlója ; ezek a lapok egybevágó téglalapok és a téglalap két átlója egyenlő hosszú.

Ekkor egybevágók a következő háromszögek : ACD', CAB', $D'B'A$ és igy

$$CAB'\sphericalangle = ACD'\sphericalangle, \quad B'AD'\sphericalangle = CD'A\sphericalangle.$$

A jobb oldali szögek az ACD' háromszög belső szögei, tehát a három lapátló közti szögek összege :

$$B'AC\sphericalangle + CAD'\sphericalangle + D'AB'\sphericalangle = D'AC\sphericalangle + CAD'\sphericalangle + AD'C\sphericalangle = 180°.$$

Ezzel beláttuk a feladatban szereplő feltételek szükséges voltát.

1987-02-054-1.eps

3. ábra

[1] Lásd: Hajós Gy. –Neukomm Gy. – Surányi J. : Matematikai versenytételek, II. köt., 2. kiad. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.) 65 - 66. old.

Teljesüljön az α, β, γ hegyesszögekre az $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$ összefüggés. Rajzoljunk $A_1A_2A_3$ háromszöget, amelyiknek ekkorák a szögei. Jelöljük az
A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 oldalak felezőpontját rendre B', C, D'-vel (3. ábra). (Így maradunk összhangban az eddigi jelölésekkel.) A CA_1D' háromszöget a CD' oldala körül, a $B'A_2D'$ háromszöget pedig a $B'D'$ oldala körül forgatva az A_1 és A_2 pontok találkoznak a tér egy A pontjában. Az A_1 pont vetülete ugyanis az A_1-ből CD'-re állított merőlegesen mozog. Ez merőleges A_2A_3-ra is, tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög magasságvonala. Metszéspontját CD'-vel jelöljük E-vel. Ez felezi a magasságot. Hasonlóan A_2 vetülete a $B'D'$-re merőleges egyenesen mozog a forgatás során. Ez a háromszög A_2-ből húzott magasságvonala, a háromszögbe eső szakaszát a $B'D'$-vel való F metszéspont felezi.

A két egyenes M metszéspontja a háromszög magasságpontja. Ez a háromszög belsejében van, mert a háromszög hegyesszögű. Az említett felezési tulajdonságok miatt

$$A_1E > EM \quad \text{és} \quad A_2F > FM.$$

Ennek folytán az a kör, amelyiken A_2 mozog, az M pontban a háromszög síkjára merőlegesen álló egyenest metszi. A metszéspont legyen A. Erre

$$AD' = A_1D' = D'A_2,$$

így ugyanebbe a pontba jut a forgatás közben A_2 is. Az A pontra teljesülnek az

$$AC = CA_1 = CA_3 \quad \text{és} \quad AB' = B'A_2 = B'A_3$$

egyenlőségek, tehát az $AB'C$ háromszög egybevágó $A_3B'C$-vel. Az AB', AC és AD' félegyenesek közti szögek tehát az adott hegyesszögekkel egyenlők, az $AB'CD'$ tetraéder pedig egyenlő oldalú.

1987-02-054-2.eps

4. ábra

Olyan téglatestet kell még szerkesztenünk, amelyiknek az A csúcsból induló élek lapátlói. Húzzunk AB' felezőpontján át olyan $D'C$-vel egyenlő és egy irányban párhuzamos $A'B$ szakaszt, amelyet a pont szintén felez, és hasonlóan CD' felezőpontján át $B'A$-val egyenlő, párhuzamos és egyirányú $C'D$ szakaszt, amelyet a pont szintén felez (4. ábra). Ekkor $AA'B'B$ és $CC'D'D$ párhuzamos oldalú és egybevágó téglalapok, mert átlóik egyenlők és felezik egymást, tehát $ABCDA'B'C'D'$ paralelepipedon. Ekkor azonban téglalapok a többi lapjai is, mert

$$BD = B'D' = AC = A'C' \quad \text{és} \quad BC' = AD' = CB' = DA',$$

mivel a tetraéder szemben fekvő élei egyenlők. A paralelepipedon tehát téglatest. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. A megoldásból látható, hogy tetszés szerinti $AB'CD'$ tetraéderhez megszerkeszthető az $ABCDA'B'C'D'$ paralelepipedon, a tetraéder ún. bennfoglaló paralelepipedonja. Erre vonatkozóan lényegében azt láttuk be, hogy a bennfoglaló paralelepipedon akkor és csak akkor téglatest, ha a tetraéder egyenlőoldalú. Hozzátehetjük – ez könnyen látható –, hogy akkor és csak akkor kocka, ha a tetraéder szabályos.

2. Az előző megjegyzésnek és a feladat állításának az összevetéséből azt is kapjuk, hogy az egyenlőoldalú tetraéder élei közti szögek hegyesszögek. Nem igaz viszont a megfelelő állítás a lapok közti szögekre. A fenti megoldásban felhasználtuk, hogy az M magasságpont az $A_1A_2A_3$ háromszög belsejében van, mert az hegyesszögű. Nem kell azonban a $B'CD'$ középháromszögben lennie. Ha pl. a $D'A_2B'$ háromszögbe esik (5. ábra), akkor az $AB'D'$ és $B'CD'$ lapok szöge tompaszög.

1987-02-055-1.eps

5. ábra

III. megoldás. Fektessünk az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest A csúcsán át az AC lapátlóra merőleges síkot (6. ábra). Ennek a téglával az AA' éle közös, a test a sík egyik oldalán fekszik. Ennélfogva az AB' és AD' félegyenesek hegyesszöget zárnak be a síkra merőleges AC félegyenessel. Hasonlóan látható be, hogy az utoljára említett két félegyenes is hegyesszöget zár be.

1987-02-055-2.eps

6. ábra

1987-02-055-2.eps

7. ábra

Tükrözzük a téglatestet az $AA^{'}D^{'}D$ és $BB^{'}C^{'}C$ lapok középpontján átmenő tengelyre (7. ábra). Ekkor a $B^{'}AD^{'}\sphericalangle$ és a $CD^{'}A\sphericalangle$ egymásba megy át, tehát ezek egyenlők. Az $ABCD$ és $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ lapokra merőleges tengelyen át tükrözve kapjuk a $D^{'}CA\sphericalangle$ és $B^{'}AC\sphericalangle$ egyenlőségét. Az $AB^{'}$, AC, $AD^{'}$ lapátlók közti szögek tehát az $ACD^{'}$ háromszög belső szögeivel egyenlők, s így összegük 180°. Ezzel a feltételek szükséges voltát beláttuk.

Legyen most α, β, γ három hegyesszög, amelyek összege 180°. Rajzoljunk a síkban γ szöget bezáró e és f félegyenest, majd egy α nyílásszögű körkúpot e tengellyel és egy β nyílásszögűt f tengellyel. Ezek metszik egymást. Legyen ugyanis a kúpok metszésvonala e és f síkjával g_1, h_1 és g_2, h_2, akkor ezek közül kettő, mondjuk h_1 és h_2, egymás meghosszabbítása, mert a szögek összege 180° (8. ábra). A g_1, h_1 és g_2, h_2, félegyenesek közti szögtartomány nyílásszöge 2α, ill. 2β. Mivel

$$2\alpha+2\beta=360^\circ-2\gamma>180^\circ,$$

így a két szögtartomány átfedi egymást. Közös részük mindkét kúpban benne van, azok tehát valóban metszik egymást. Egyik metszésvonalukat g-vel jelölve, az e, f, g félegyenesek közti szögek γ, β és α.

1987-02-056-1.eps

8. ábra

1987-02-056-2.eps

9. ábra

Jelöljük a félegyenesek közös kezdőpontját 0-val. Legyen g egy ettől különböző pontja D_1. Húzzuk meg D_1-ből az OD_1-gyel e és g síkjában $(f,\ g)\sphericalangle(=\beta)$ és f és g síkjában $(e,\ g)\sphericalangle(=\alpha)$ szöget bezáró egyenest (9. ábra). Az előbbinek e-vel, ill. az utóbbinak f-fel való metszéspontja legyen B_1, ill. C. Ekkor az OB_1D_1 és a D_1CO háromszög egybevágó, mert a közös $OD_1=D_1O$ oldalukon levő szögek egyenlők. Így $OB_1=D_1C$ és $B_1D_1=CO$. Ekkor viszont a B_1OC háromszög is egybevágó az előbbiekkel, mert

$$B_1OC\sphericalangle=\gamma=OB_1D_1\sphericalangle,$$

és a megfelelő szögszárakon levő oldalak egyenlők. Így viszont a CD_1B_1 három-szög is egybevágó az előbbiekkel, mert az utolsó egybevágóságból következik, hogy $CB_1=OD_1$ és így pl. az OB_1D_1 háromszöggel megfelelő oldalaik egyenlők. Az OB_1CD_1 tetraéder tehát egyenlőoldalú.

Jelöljük a CO, CB_1, CD_1, OB_1, B_1D_1, D_1O élek felezőpontját rendre A, $B^{'}$, $D^{'}$, U, V, W-vel. Ekkor A, $B^{'}$, V, W egy rombusz csúcsai, mert $AB^{'}$ és WV párhuzamos OB_1-gyel és fele akkora, miután az OCB_1, ill. OD_1B_1 háromszög középvonala. Így egy síkban vannak és egy paralelogramma csúcsai. Ezen felül AW a COD_1 háromszög középvonala, tehát félakkora, mint CD_1, ami meg OB_1-gyel egyenlő. Így a paralelogramma valóban rombusz, tehát AV és$B^{'}W$ átlói merőlegesek és felezik egymást. Hasonlóan látható, hogy $AUVD^{'}$ és $B^{'}D^{'}WU$ is rombusz, így AV, $B^{'}W$ és $D^{'}U$ páronként merőlegesek és felezőpontjuk közös; jelöljük ezt $A^{'}$-vel.

Az $A^{'}$ pontból az $AB^{'}D^{'}$ háromszög oldalai derékszögben látszanak. Legyen B, $C^{'}$, ill. D az a pont, amire $AA^{'}B^{'}B$, $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$, ill. $AA^{'}D^{'}D$ paralelogramma. Mivel ezek a paralelogrammák téglalapok, az $ABCDA^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ paralelepipedon téglatest, Ennek $AB^{'}$, AC, $AD^{'}$ lapátlói rendre OB_1, OC, OD_1-gyel párhuzamosak, így a köztük levő szögek az adott szögek. Ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Azok a versenyzők, akik számolásmentes utat követtek a feladat megoldásában, az elégségesség bizonyításánál többnyire adottnak tekintettek három egy pontból induló, nem egy síkban fekvő félegyenest, amelyek közti szögek hegyesszögek és összegük 180°. Ekkor nem is használták azt a feltételt, hogy a szögek hegyesszögek. Valójában ez éppen annak a belátásához kell, hogy tetszés szerinti három hegyesszöghöz, amelyek összege 180°, van három olyan félegyenes, amelyek éppen ekkora szöget zárnak be. Emögött pedig az rejlik, hogy egy háromél élei közti szögek közül bármelyik kettő összege nagyobb a harmadiknál.

2. A megoldás gondolatmenetével tetszés szerinti tetraéderre belátható, hogy a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszoknak – a tetraéder középvonalainak – közös a felezőpontja. A középvonalak a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonjának egy csúcsból induló éleivel párhuzamosak és egyenlők. Így akkor és csak akkor merőlegesek páronként, ha a tetraéder egyenlőoldalú.

2. *Legyen az n a kettőnél nagyobb pozitív egész szám. Melyik az a legnagyobb h érték, és melyik az a legkisebb H érték, amelyekre igaz, hogy*

$$h<\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+a_1}<H \tag{1}$$

bármilyen pozitív számok legyenek is a_1, a_2, $\ldots$ a_n?

I. megoldás. Nézzük két egymás utáni tag összegét:

$$\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}+\frac{a_{i+1}}{a_{i+1}+a_{i+2}},$$

itt az utolsó tag utánin az elsőt értve. Ennek megfelelően $a_{n+1},\ a_{n+2}$ jelentsen a_1-et, ill. a_2-t. A két tag összege legalább 1, ha $a_{i+2} \leqq a_i$, és legfeljebb 1, ha $a_{i+2} \geqq a_i$.

Válasszuk i-t úgy, hogy a_{i+2} az előforduló legkisebb érték legyen. Ekkor a kiszemelt két tag összege legalább 1. A többi tag mind pozitív, és feltétel szerint van még legalább egy tag, így az összeg mindig nagyobb, mint 1. Ha viszont i-t úgy választjuk, hogy a_{i+2} az előforduló legnagyobb érték legyen, akkor a kiválasztott két tag összege legfeljebb 1; miután a további $n-2$ tag mindegyike kisebb 1-nél, igy azt kapjuk, hogy az összeg mindig kisebb, mint

$$1+n-2=n-1.$$

Megmutatjuk, hogy az összeg mind a két korláthoz tetszés szerint közel kerülhet, ha az a_i sorozatot alkalmasan választjuk. Az

$$a_i=q^{i-1},\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

pozitív q hányadosú mértani sorozathoz tartozó S_q összeg :

$$S_q=\frac{n-1}{1+q}+\frac{q^{n-1}}{q^{n-1}+1}.$$

Becsüljük ezt felülről. Bármilyen (kis) pozitív szám is p,

$$S_q<\frac{n-1}{1+q}+1<1+\frac{n-1}{q}<1+p,\quad \text{ha}\quad q>\frac{n-1}{p}.$$

Másrészt alulról becsülve S_q-t

$$S_q>\frac{n-1}{1+q}=n-1-\frac{q(n-1)}{1+q}>(n-1)-(n-1)q>n-1-p,\quad \text{ha}\quad q<\frac{p}{n-1}.$$

Ezzel beláttuk, hogy a feladatban kérdezett értékek : $h=1,\ H=n-1$.

Megjegyzések. 1. A vizsgált összeg felvesz minden értéket 1 és $n-1$ között. Ez igaz már a mértani sorozathoz tartozó S_q összegre, hiszen ez pozitív q-kra q-nak folytonos függvénye, amelyik felvesz $n-1$-hez tetszés szerint közeli értékeket is és 1-hez tetszés szerint közelieket is, tehát minden közbenső értéket is.

2. A további megoldásokban csak azt bizonyítjuk, hogy a kérdéses összeg 1 és $n-1$ közé esik. Az, hogy ezek a korlátok nem javíthatók, ugyanúgy látható be, mint az I. megoldásban.

II. megoldás. Fel fogjuk használni, hogy ha $x/y<1$, és $x,\ y$ pozitív, továbbá z is pozitív szám, akkor

$$\frac{x}{y}<\frac{x+y}{y+z}.$$

Valóban

$$\frac{x}{y}=\frac{x}{y}(y+z)\frac{1}{y+z}=\left(x+\frac{x}{y}z\right)\frac{1}{y+z}<\frac{x+z}{y+z}.$$

Jelöljük a rövidség kedvéért az $a_1+a_2+\ldots+a_n$ összeget S-sel. Egyfelől csökkentjük az i-edik törtet, ha a nevezőjéhez hozzáadjuk az $S-a_i-a_{i+1}$ összeget, másfelől növeljük, ha ezt az összeget a számlálóhoz is, a nevezőhöz is hozzáadjuk. Így a következő kettős egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{a_i}{S}<\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}<\frac{S-a_{i+1}}{S}.$$

Itt a_{n+1} ismét a_1-et jelent. Összeadva az egyenlőtlenségpárokat $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$-re a bal oldalon 1-et, a jobb oldalon $n-1$-et kapunk, vagyis a kívánt egyenlőtlenséget.

III. megoldás. Jelöljük T_n-nel a feladatban szereplő összeget és az $a_n,\ a_{n-1},\ \ldots,\ a_1$ fordított sorrendben vett sorozathoz tartozót $T_n^{'}$-vel. Mind a két összeg törtjeiben ugyanazok a nevezők lépnek fel, és a két összeg azonos nevezőjű törtjeinek az összege 1, így

$$T_n+T_n^{'}=n.$$

Így ha megmutatjuk, hogy a szóban forgó összeg mindig nagyobb, mint 1, akkor ez igaz $T_n^{'}$-re is, tehát

$$T_n=n-T_n^{'}<n-1.$$

Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy 1 alsó korlát. Az $n=3$ esetben közös nevezőre hozva az összeget, és számlálót, nevezőt tagokra bontva a nevező minden tagja előfordul a számlálóban is legalább akkora együtthatóval. A számításokat elvégezve:

$$T_3=1+\frac{a_1a_2a_3+a_1^2a_2+a_2^2a_3+a_3^2a_1}{(a_1+a_2)(a_2+a_3)(a_3+a_1)}>1.$$

Tegyük most fel, hogy az n pozitív számból képezett összegek mindig 1-nél nagyobbak, ahol $n \geqq 3$. Ekkor elég azt megmutatnunk, hogy az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n+1}$ számokból képezett T_{n+1} összeg nagyobb az első n számból képezettnél. De

$$T_{n+1}-T_n=\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_1}-\frac{a_n}{a_n+a_1}=$$
$$=\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_1}+\frac{a_1}{a_1+a_n}-1>0,$$

mert a három tört összege az $a_n,\ a_{n+1},\ a_1$ számokból képezett összeg, és erről már beláttuk, hogy mindig nagyobb 1-nél. Így, felhasználva az indukciós feltevést is,

$$T_{n+1}>T_n>1,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. 1. Az utolsó bizonyítást lényegesen egyszerűsíthettük volna egyrészt azzal az észrevétellel, hogy T_{n+1} nem változik meg, ha a számokat ciklikusan cseréljük. Így választhatjuk a sorrendet úgy, hogy a_{n+1} az előforduló legkisebb érték legyen. Ekkor a $T_{n+1}-T_n$ különbségben az első tag nem kisebb a kivonandónál, a különbség tehát pozitív. Másrészt képezhető a szóban forgó összeg két számból is és az értéke 1, így minden 2-nél nagyobb n-re már 1-nél nagyobb. Ezzel elkerülhető minden számolás.

A fenti megoldás viszont azt mutatja, hogy az indukciós bizonyítás minden további fogás nélkül is célra vezet. így viszont a 3 tag esetére nem lett volna érdemes elkerülni a kiszámolást, mert azt a megoldás második részében is fel tudtuk használni.

2. A vizsgált összeg valójában csak az a_{i+1}/a_i hányadosoktól függ. Jelöljük ezeket b_i-vel $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$-re és legyen $b_n=a_n/a_1$. Ekkor a vizsgált összeg az

$$\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{1+b_2}+\ldots+\frac{1}{1+b_n}$$

alakot ölti, és itt

$$b_1b_2\ldots b_n=1.$$

Vonjuk össze az utolsó két tagot:

$$\frac{1}{1+b_{n-1}}+\frac{1}{1+b_n}>\frac{1+b_{n-1}+b_n}{1+b_{n-1}b_n+b_{n-1}+b_n}>\frac{1}{1+b_{n-1}b_1}$$

a II. megoldásban alkalmazott megjegyzés alapján. Ezt beírva az összegbe a $b_1,\ \ldots,\ b_{n-2},\ b_{n-1}b_n$ számokból képezett $n-1$-tagú összeget kapjuk, és a számok szorzata továbbra is 1. Ennek alapján újabb teljes indukcíós bizonyítást nyerhetünk.

3. *A és B a következő játékot játssza: az első 100 pozitív egész közül véletlenszerűen kiválasztanak k darabot és ha ezek összege páros, akkor A nyer, egyébként pedig B. A k milyen értékeire lesz egyenlő A és B nyerési esélye?*

I. megoldás. Az első 100 pozitív egész szám közül kiválasztható k-asok közül úgy választunk ki csoportokat, ameddig tudunk, hogy egy-egy csoportban ugyanannyinak az összege legyen páros, mint amennyié páratlan. Válasszuk ki először azokat, amelyekben szerepel vagy az 1 vagy a 100, de nem mind a kettő. Ezeket párokba állíthatjuk úgy, hogy az első 98 szám közül kiválasztott egy-egy $k-1$-eshez egyszer az 1-et, egyszer a 100-at vesszük k -adiknak. Ekkor minden pár egyik k-asának az összege páros, a másiké páratlan.

A maradó k-asok közül vegyük azokat, amelyek a 2 és a 99 közül az egyiket tartalmazzák, a másikat nem. Ezek közül is ugyanannyinak az összege páros, mint amennyié páratlan, az előbbi gondolatmenet szerint. Az eljárást tovább ismételjük a 3, 98, a 4, 97, …, az 50, 51 párral. Ezután már csak olyan k-asok maradnak meg, amelyek a kiválasztáshoz használt párok közül bizonyosaknak mindkét eleméből tevődnek össze. Ilyenek csak páros k esetén vannak, tehát páratlan k esetén A-nak és B-nek egyenlő esélye van a nyerésre.

Páros k esetén azok a k-asok maradnak meg, amelyek az említett 50 pár közül $k/2$-nek mindkét eleméből állnak. Mivel mindegyik pár két elemének összege 101, tehát páratlan szám, így mindegyik fennmaradt k-as elemeinek összege páros, ha $k/2$ páros és páratlan, $k/2$ páratlan. Ezek szerint A-nak nagyobb a nyerési esélye, ha k osztható 4-gyel, ha viszont k 4-gyel osztva 2 maradékot ad, akkor B esélye nagyobb a nyerésre.

Megjegyzések. 1. Az elmondottak alapján ki is számíthatjuk, ki hány esetben nyer. A kiválasztható k-asok száma $\binom{100}{k}$ és, ha k páros, akkor $\binom{50}{k/2}$-vel több esetben nyer az egyik játékos, mint a másik. Így páratlan k esetén mindegyikük

$$\frac{1}{2}\binom{100}{k}$$

esetben nyer, páros k esetén pedig az egyikük és másikuk számára kedvező esetek száma

$$\frac{1}{2}\left(\binom{100}{k}-\binom{50}{k/2}\right),\quad \text{ill.}\quad \frac{1}{2}\left(\binom{100}{k}+\binom{50}{k/2}\right).$$

2. Az eljárás alkalmazható akkor is, ha 100 helyett bármilyen páros N számot mondunk. A válasz ekkor is ugyanaz, mint a 100 esetében volt. Ha páratlan N számot veszünk 100 helyett, akkor már sohasem egyenlők a nyerési esélyek. Ilyenkor 1 és $N-1$, majd 2 és $N-2$, 3 és $N-3$ és így tovább, ismét használhatók egyenlő esélyt adó k-asok kiválasztására. A fennmaradó k-asok közül külön kell foglalkozni azokkal, amelyekben előfordul az N. A részletek végiggondolását az olvasóra bízzuk. B-nek nagyobb a nyerési esélye, ha k 4-gyel osztva 1 vagy 2 maradékot ad, különben A-nak.

II. megoldás. Vizsgáljuk az $1,\ 2,\ \ldots,\ 2N$ számok közül kiválasztható k-asokat. Jelöljük $D(N,\ k)$-val a páros, illetve a páratlan összegű k-asok számának a különbségét. Erre a függvényre állapítunk meg egy rekurzív összefüggést. Legyen $k \leqq 2N-2$. Csoportosítsuk a k-asokat aszerint, hogy hány számot tartalmaznak a $(2N-1,\ 2N)$ párból. Az első csoportba tartozzanak azok a k-asok, amelyek tartalmazzák mind a kettőt, a másodikba azok, amelyek egyiket sem tartalmazzák, a harmadikba pedig azok, amelyek az egyiket tartalmazzák, a másikat nem.

A harmadik csoportbeli k-asoknak $k-1$ eleme nem nagyobb $2N-2$-nél, és minden ilyen $k-1$-es a $2N-1$-gyel és a $2N$-nel is k-assá egészíthető ki. Az elemek összege a két k-as közül az egyikben páros, a másikban páratlan. A harmadik csoportban tehát ugyanannyi páros összegű k-as van, mint páratlan összegű, így ezek járuléka $D(N,\ k)$ értékéhez 0.

A második csoport k-asai csupa $2N-2$-n él nem nagyobb számból állnak, ezek tehát $D(N-1,\ k)$-t adnak $D(N,\ k)$ értékéhez.

Az első csoport minden k-asa $k-2$ elemet tartalmaz, amelyek nem nagyobbak $2N-2$-nél, továbbá a $2N-1$-et és a $2N$-et. Az első $k-2$ elem összegét tekintve a vizsgált különbség $D(N-1,\ k-2)$. A k-asokban még $2N-1+2N$, tehát páratlan szám adódik az összeghez, így annak párossága az ellenkezőjére változik. Az első csoport k-asai, tehát $-D(N-1,\ k-2)$-vel járulnak hozzá $D(N,\ k)$ értékéhez. Ezzel a következő összefüggést kaptuk:

$$D(N,\ k) = D(N-1,\ k) - D(N-1,\ k-2). \tag{3}$$

Az összefüggés $k = 2N-1$-re és $k = 2N$-re is helyes, ha megállapodunk abban, hogy ha $k > 2N$, akkor $D(N,\ k)$ jelentsen 0-t.

Ennek alapján teljes indukcióval igazoljuk a következő állítást: $D(N,\ k)$ pozitív, ha k osztható 4-gyel, negatív, ha k páratlan szám kétszerese, és 0, ha k páratlan. Belátjuk először, hogy ez $k = 1,\ 2,\ 3$ és 4-re igaz. ($2N$ tetszőleges, k-nál nem kisebb páros szám.)

$k = 1$-re N páros szám van az adottak közt és N páratlan, így $D(N,\ 1) = 0$.

Párokat választva ki, akkor lesz az összeg páros, ha vagy mind a két szám páros, vagy mind a kettő páratlan, és akkor lesz páratlan, ha az egyik szám páros, a másik páratlan. Az előbbi és az utóbbi típusú párok száma $2\binom{N}{2} = N(N-1)$, ill. N^2, tehát $D(N,\ 2) = -N < 0$. Ezek az értékek $N = 1$-re is helyesek.

Három szám összege páros, ha mindegyik szám páros, vagy egyikük páros, a másik kettő páratlan; viszont páratlan az összeg, ha mindegyik szám páratlan, vagy ha egyikük páratlan, a másik kettő pedig páros. Mivel a páros és páratlan számok száma egyenlő, így a kétféle hármasok száma is megegyezik, tehát

$$D(N,\ 3) = 0.$$

Ha $k = 4$, akkor páros összeget kapunk, ha mind a 4 páros, vagy mind a 4 páratlan, vagy közülük 2 páros, 2 páratlan. Páratlan lesz az összeg, ha a 4 szám között 1 páratlan van, vagy ha 1 páros van. Az egyik-, ill. másikféle esetek száma

$$2\binom{N}{4} + \binom{N}{2}^2 = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{12} + \frac{N^2(N-1)^2}{4} = \\ = \frac{N(N-1)(2N^2-4N-3)}{6},$$

illetőleg

$$2N\binom{N}{3}\frac{N^2(N-1)(N-2)}{3} = \frac{N(N-1)(2N^2-4N)}{6};$$

$N = 2$ esetén az esetek száma 1, ill. 0. Eszerint

$$D(N,\ 4) = \frac{n(N-1)}{2} > 0.$$

A vizsgált k értékek esetén tehát minden szóba jövő N-re igaz az állítás. Ekkor egyszersmind $N = 1$ és $N = 2$-re minden szóba jövő k esetén igaz az állítás.

Tegyük most fel, hogy $M > 2,\ K > 4$ és igaz az állítás, ha $k < K$, továbbá az M-nél kisebb N-ekre tetszés szerinti szóba jövő k mellett. A (3) összefüggés szerint

$$D(M,\ K) = D(M-1,\ k) - D(M-1,\ K-2).$$

Ha K páratlan, akkor $K-2$ is, így feltevés szerint a jobb oldal mindkét tagja 0, tehát $D(M,\ K)$ is az. Ha K páros, akkor $K-2$ is, és feltevés szerint $D(M-1,\ K)$, ha nem 0 (ti. ha $M=K$), ellenkező előjelű, mint $D(M-1,\ K-2)$. Az indukciós feltételből az is következik, hogy $D(M-1,\ K-2)$ nem 0. Azt kaptuk tehát, hogy $D(M,\ K)$ sem 0, és ellenkező előjelű, mint $D(M-1,\ K-2)$. Ez azonban azt jelenti, hogy az állítás helyessége öröklődik M és K-ra. A kimondott állítás tehát minden szóba jövő $N,\ k$ értékpárra igaz.

Megjegyzések. 1. Felesleges volt $D(N,\ 3)$ és $D(N,\ 4)$ kiszámítása, mert az indukciós bizonyítás már ezekre is adja az állítás helyességét. Jónak láttuk azonban mind a 4 lehetséges esetre bemutatni egy-egy példát. Aki nem tartja erőszakoltnak a $k=0$ eset megengedését, ezt tekintheti a $k=2$ helyett további egyszerűsítésként.

2. A teljes indukciónak itt egy ritkábban előforduló esetével találkoztunk, a két változó szerint egyidejűleg futó teljes indukcióval, hiszen mikor M-re és K-ra bizonyítottuk az öröklődést, fel kellett használnunk azt is, hogy $M-1$-re és ugyanerre a K-ra igaz az állítás. Így tulajdonképpen a $k=2$ eset után $k=3$-ra és minden N-re, majd $K=4$-re és így tovább adódik az állítás helyessége. Ehhez viszont kell az, hogy a legkisebb N értékre minden szóba jövő k esetén igaz legyen az állítás. Esetünkben ez mindössze az $N=1,\quad k=1,\ 2$ eseteket jelentette. Annyiban is speciális volt ez a bizonyítás, hogy M-re a K-nál kisebb k-kra nem volt szükséges felhasználnunk az indukciós feltevést.

III. megoldás. Az előző megoldásban bevezetett jelöléssel $D(50,\ k)$-t kapcsolatba hozhatjuk az

$$1+(-1)^c x, \quad c=1,\ 2,\ \ldots,\ 100$$

elsőfokú polinomok szorzatával. Ebben úgy kapjuk a k-adfokú tagokat, hogy k tényezőből az x-es tagot vesszük, a többiből az 1-et, ezeket összeszorozzuk és az összes ilyen tagot összeadjuk. Egy-egy ilyen tagban x^k együtthatója -1-nek a $c_1+c_2+\ldots+c_k$-adik hatványa, ahol az összeadandók különböző, 100-nál nem nagyobb egészek. Az együttható tehát 1, ha az összeg páros, -1, ha az összeg páratlan. Eszerint x^k együtthatója a szorzatban éppen $D(100,\ k)$.

A szorzat másfelől felváltva $1+x$ és $1-x$ tényezők szorzata, vagyis

$$\left(1-x^2\right)^{50}=1-50x^2+\ldots+(-1)^j\binom{50}{j}x^{2j}+\ldots+x^{100}.$$

Eszerint egyenlők a nyerési esélyek, ha k páratlan, $\binom{50}{j}$-vel több esetben nyer A, mint B, ill. B, mint A, ha $k=2j$ és j páros, ill. páratlan.

Megjegyzés. Az $F(k)=D(100,\ k)$ függvényt úgy sikerült meghatároznunk, hogy hozzárendeltük az

$$F(x)=1+f(1)x+f(2)x^2+\ldots+f(100)x^{100}$$

polinomot, amit sikerült más alakba írni és abból f értékeit meghatározni. F-et az f generátor függvényének nevezzük. A generátorfüggvény gondolata és számos érdekes alkalmazása Leonhard Euler (1707 – 1783) rendkívül termékenynek bizonyult felfedezése, ami a matematika számos ágában alapvető szerepet kapott. Feladatunkban alkalmazható 100 helyett tetszés szerinti N számra, és az I. megoldáshoz fűzött 2. megjegyzésben kimondott eredményre vezet. A számolás elvégzését az olvasóra bízzuk.

Surányi János

Helyesbítés

Az 1985/86-os évi pontverseny iskolák szerinti összesítéséből (1986/10. szám, 455 – 456. oldal) sajnálatos módon kimaradt a *Landler Jenő Gimnázium* (Budapest, XIX.) tanulóinak eredménye. Az iskolából 3 tanuló (dr. Marosvári Péter tanár tanítványai) összesen 260 pontot szerzett.

Ezúton kérjük az érintettek szíves elnézését.

A szerkesztőség