Az alábbi cikk a *Kvant* M 1002-es feladatának megoldásával foglalkozik. A feladat szövege :

a) *Egy szórakozott matematikus elfelejtette lakása biztonsági zárának három jegyű kódját. (A záron a* $0, \dots, 9$ *számjegyek találhatók, s ha ezek közül sikerül a három megfelelőt a helyes sorrendben megnyomnia, az ajtó kinyílik, függetlenül a megelőző, sikertelen próbálkozásoktól.) Így most sorra nyomkodja a gombokat — másodpercenként egyet-egyet. Meg van győződve arról, hogy még abban a legkedvezőtlenebb esetben sem kényszerül* 16 *perc* 42 *másodpercnél (ami* 1002 *másodperc) hosszabb várakozásra, ha a helyes kombinációt próbálná utoljára. Igaza van-e? Milyen módszerrel nyithatja ki leggyorsabban az ajtót?*

Hogyan módosítható az állítás, ha

b) *csak az* 1, 2, 3*-as gombok fordulhatnak elő a kódban?*

c) *a matematikus emlékszik, hogy a kód három különböző számjegyből állt?*

(Ennek a feladatnak a nyomán készült a Gy. 2398. gyakorlat, amelynek megoldása a KÖMAL 1987. novemberi számának 391. oldalán olvasható. Szerk.)

Megjegyzések a feladat feltételeihez

Mindhárom részfeladatban két kérdésre kell válaszolnunk:

1. mennyi idő szükséges – a legkedvezőtlenebb esetben – a zár kinyitásához?

2. milyen módszerrel csökkenthető a próbálkozások ideje a legrövidebbre?

Ebben a cikkben megadjuk a választ az első kérdésre; a második, mint majd látni fogjuk, még pontosításra szorul: mindenesetre mutatunk egy módszert a szórakozott matematikus kisegítésére, és az is kiderül, milyen értelemben kellene javítani rajta.

A megoldás ötlete

A szóba jöhető háromjegyű kódok száma nyilván ezer. Mindegyiküket kipróbálva előbb vagy utóbb rábukkanunk az elfelejtett kódra, de ez akár 3000 másodpercig is eltarthat, ami majdnem háromszorosa a tervezett 1002 másodpercnek!

Hogyan lehet hát elég az 1002 másodperc? És elég-e egyáltalán?

Vegyük észre, hogy ha például sorra megnyomjuk az 1-es, 2-es, ..., majd a 9-es gombot, akkor nem három kombinációt próbáltunk ki (123, 456, 789), hanem hetet (123, 234, 345, 456, 567, 678, 789). A kapott kódok egy láncot alkotnak: mindegyikük utolsó két jegye megegyezik a következő hármas első két jegyével.

Ahhoz, hogy 1002 másodperc alatt kinyithassuk a zárat, ilyen láncra kellene fűznünk az ezer háromjegyű kódot: az első másodpercben kezdhetnénk az első kombináció kipróbálását, a másodikban a másodikét, ... az 1000.-ben az ezredikét.

Innen egyébként látható, hogy 1002 másodpercnél kevesebb nem lenne elegendő: abban az esetben, ha minden kombinációt végig akarunk próbálni, az utolsóhoz nem kezdhetünk hozzá az ezredik másodpercnél korábban.

A cél világos : sorba kellene rendeznünk az összes háromjegyű kódot úgy, hogy mindegyikük az előző hármas második két jegyével kezdődjék. De vajon elérhető-e?

Az alábbi esetben például – bár a helyzet a feladatbelihez hasonló – a fenti cél nem érhető el:

Tegyük fel, hogy a kód jegyei különbözőek, és csak az 1, 2, 3 számok közül kerülhetnek ki. Most tehát az 123, 132, 213, 231, 312, 321 hármasokat kell végigpróbálnunk. (Lényegében ez volt a KÖMAL Gy. 2398. gyakorlata. Szerk.) Ha találunk hozzájuk láncot, akkor 8 másodperc alatt mindenképpen végzünk. Csakhogy most ilyen lánc nincsen! Ezek a számhármasok két láncot határoznak meg (melyek ezek?), így a próbálkozásokhoz 9 másodperc kell.

A kérdés vizsgálatában és a próbálkozások megszervezésében szükségünk lesz az *irányított gráfok* fogalmára. Irányított gráfnak nevezünk véges sok pontot – a gráf csúcsait –, amelyek közül néhányat irányított szakaszok – a gráf élei – kötnek össze. Megengedünk olyan éleket is, amelyek egy pontot önmagával kötnek össze.

A T_{10} *irányított gráf*

Az alábbiakban elkészítünk egy irányított gráfot, melynek segítségével eljutunk az a) feladat megoldásához. Tekintsünk 100 pontot és rendeljünk ezekhez kétjegyű sorszámokat : 00, 01, 02, ..., 98, 99. Akkor vezessen él az ab pontból a dc ponthoz, ha $b = d$, pl. (13; 38), (45; 55). Az olyan pontokból tehát, melyek sorszáma két egyforma számjegy, önmagukhoz is vezet él.

Jelölje az így kapott irányított gráfot T_{10}.

Írjuk ezután az ab-ből bc-be mutató élre az abc háromjegyű kódot: $ab \stackrel{abc}{\longrightarrow} bc$ ($13 \stackrel{138}{\longrightarrow} 38$.) Ekkor minden háromjegyű kód pontosan egyszer fordul elő: a 455 például a 45-ből az 55-be mutató élre van felírva. Maga T_{10} 100 csúcsból és 1000 élből áll; utóbbiakra felírtuk az összes háromjegyű kódot. Látható, hogy minden csúcsból 10 él indul, és minden csúcsba 10 él fut be: ab-ből az $ab0$, $ab1$, ..., $ab9$ élek lépnek ki, az ide futó élek pedig : $0ab$, $1ab$, ..., $9ab$.

Az is látszik, hogy irányított élek mentén haladva egy tetszőleges ab csúcsból bármely cd csúcsba eljuthatunk:

$$ab \stackrel{abc}{\longrightarrow} \mathrm{bc} \stackrel{bcd}{\longrightarrow} \mathrm{cd}.$$

Az ilyen irányított gráfokat *erősen összefüggőnek* nevezzük.

Vegyük észre, hogy ha sikerül úgy bejárnunk T_{10} -et, hogy minden élén pontosan egyszer menjünk végig, akkor egyben elértük kitűzött célunkat is: egyetlen láncba fűztük az összes háromjegyű kódot.

Ilyen útvonal létezését állítja az

Euler-vonal tétele

Nevezzünk egy irányított gráfot *szabályosnak*, ha bármely A csúcsából ugyanannyi él indul ki, mint amennyi befut ide: jelöljük ezt az értéket p_A-val.

1987-12-435-1.eps

1. ábra

T_{10} -ben például minden ab csúcsra $p_{ab} = 10$; az 1. ábrán látható erősen összefüggő szabályos irányított gráfban minden A csúcsra $p_A = 2$.

Tétel: erősen összefüggő, szabályos irányított gráfban mindig található olyan kör – azaz zárt út az irányított élek mentén –, amely a gráf minden élén pontosan egyszer halad át.

Az ilyen köröket nevezzük *Euler-vonalnak*,vagy Euler-körnek.

A tétel bizonyítása

Szemeljük ki a gráf egy tetszőleges A csúcsát, és induljunk el innen az irányított élek mentén, „felégetve magunk mögött a hidakat”, azaz kiradírozva mindazokat az éleket, amelyeken már áthaladtunk. Lévén az élek száma véges, előbb-utóbb elakadunk: olyan csúcsba érünk, ahonnan már nem vezet ki él. Mivel minden csúcsból annyi él lép ki, amennyi oda befutott, ez a „zsákutca-csúcs” nem lehet más, mint A (2. ábra).

1987-12-435-2.eps

2. ábra

Megtett utunk így egy kör – c –, amely A-ból indul és A-ban végződik. Mivel kiradíroztuk magunk mögött a bejárt útszakaszokat, biztos, hogy a kör a gráfnak egy élét sem tartalmazza kétszer. A megmaradó irányított gráf pedig nyilván továbbra is szabályos marad.

Ha c a gráf összes élét tartalmazza, akkor Euler-kör, így teljesül a tétel állítása.

Ha nem, akkor a c kör által érintett csúcsok között van olyan A_1 csúcs, amelynek maradt ki nem radírozott kijárata – jelölje ezt S_1 . (Ha nincs ilyen csúcs, akkor a vizsgált irányított gráf nem lehet erősen összefüggő.)

Induljunk el most A_1 -ből, megint kiradírozva a bejárt éleket; most is zsákutcába érünk, ami a fentiek szerint csak A_1 lehet; így kapunk egy c_1 kört, melynek kezdő- és végpontja A_1 .

1987-12-435-3.eps

3. ábra

c-t és c_1 -et egyetlen C körré egyesíthetjük (3. ábra), ha a c körön A_1 -hez érve először c_1 -en megyünk végig, s csak ezután a c kör A_1A szakaszán.

Ha C tartalmazza az eredeti gráf minden élét, teljesül a tétel állítása. (A 3. ábrán ez a helyzet.) Ellenkező esetben a C által érintett csúcsok között kell legyen olyan A_2 , melynek maradt kijárata – S_2 – s. í. t.

Hasonlóan növelve a kört, előbb-utóbb elfogynak a gráf élei, a tétel tehát igaz, a bizonyítást befejeztük.

A hozzáértők bizonyára észrevették, hogy a teljes indukció módszerét felhasználva bizonyításunk precízebb és rövidebb lehetett volna. Egy elegáns – bár lényegében a bemutatottal megegyező – gondolatmenet kiindulása a következő: vegyük a *leghosszabbat* azon körök közül, amelyek egyetlen élen sem mennek át kétszer ...

Az általunk választott bizonyítás azonban módszert is ad Euler-kör megtalálására.

Keressük $t_{\min} - t$

Vegyük most sorra az a), b) és a c) feladatokat.

a) Mivel T_{10} szabályos, erősen összefüggő irányított gráf, létezik benne e Eulerkör, amely a gráf 1000 élének mindegyikén pontosan egyszer halad át. Válasszunk egy tetszőleges háromjegyű számot, és járjuk be a gráf éleit a kiválasztott számú élen indulva e mentén. Az érintett élek sorszámai a háromjegyű kódok keresett sorozatát adják, amely tehát tartalmazza az összes háromjegyű számot, s minden eleme – az elsőt kivéve – az őt a sorban megelőző kód második két jegyével kezdődik.

b) T_{10} -hez hasonlóan kapható a T_3 irányított gráf: ennek 9 csúcsa az 1, 2, 3 számjegyekből készíthető kétjegyű számok, 27 élét pedig az 1, 2, 3 jegyekből álló összes háromjegyű számokkal jelölhetjük meg.

T_3 -ban is létezik Euler-kör (ilyen látható a 4. ábrán), így a b) feladatban $t_{\min} = 29$ sec.

1987-12-436-1.eps

4. ábra

Általában, n gomb és háromjegyű kód esetén a megfelelő T_n irányított gráfnak n^2 csúcsa és n^3 éle lesz, s így $t_{\min} = (n^3 + 2)$ sec.

c) Ha azt is tudjuk, hogy az elfelejtett háromjegyű kód számjegyei különbözők, akkor n gomb ($n \geqq 3$) esetén $n(n-1)(n-2)$ ilyen számhármas van ; az $n = 3$ esetben – melyet a megoldás ötletének bemutatásakor ismertettünk – ez 6 különböző kódot jelent, míg a feladat szerinti n=10 esetben 720-at.

Vegyünk fel $n(n-1)$ pontot; jelöljük őket olyan kétjegyű számokkal, melyek jegyei különbözőek; n=3-ra így 6 pontot kapunk: 12, 13, 21, 23, 31, 32; n=10-re 90 pontot: 01, 02, ..., 09; 10, 12,..., 19; ...; 90, 91, ..., 98. Vezessen él ab-ből dc felé, ha $b = d$ és $a \neq c$ *;* írjuk az él fölé most is az abc kódot.Vegyük észre, hogy a konstrukció miatt *a, b* és c páronként különbözőek.

Az így kapott szabályos irányított gráf (jelölje D_n) minden ab csúcsára nyilván $p_{ab} = n - 2$ (5. ábra).

1987-12-437-1.eps

5. ábra

1987-12-437-2.eps

6. ábra

$n > 3$ esetén a D_n irányított gráf erősen összefüggő (bizonyítsuk!), az $n = 3$ esetben azonban nem (6. ábra).

Az *Euler-vonal* tételéből adódik, hogy:

a c) feladatban $t_{\min} = 722$ másodperc (általában $n > 3$ esetén $t_{\min} = n(n-1)(n-2) + 2$ másodperc); $n = 3$ esetén D_3 nem-összefüggő volta miatt a kódok végignézéséhez szükséges idő 1 másodperccel nő: nem 8, hanem 9 másodperc.

Megtaláltuk tehát $t_{\min}$ értékét mind az a), mind pedig a b) és c) feladatokban. Próbáljuk meg ugyanezzel a módszerrel megkeresni $t_{\min}$ értékét, ha

1. a zár 10-gombos, és tudjuk, hogy a kód három jegye közül legalább az egyik 9-es;
2. a zár 10-gombos, és tudjuk, hogy a háromjegyű kód jegyei közül pontosan kettő egyforma;
3. $2 \leqq k \leqq n$, a zár n gombos, a kód pedig k jegyű;
4. a zár 6-gombos, rajtuk a 0, 1, ..., 5 jegyekkel; a kód mindhárom jegye különböző, egyikük éppen 5.

Hogy néz ki mindez a gyakorlatban?

A fentiekből következik, hogy eljárhatunk a következőképpen :

1. Fölvesszük a megfelelő irányított gráfot (pl. az a), b), ill. c) feladatokhoz ezek rendre T_{10}, T_3 és D_{10}).
2. Keresünk benne Euler-vonalat (jelölje ezt e).
3. Rögzítjük a gráf egy tetszőleges S_1 élét és innen indulva sorra vesszük az $S_2, S_3, \ldots S_n$ éleket az e kör mentén haladva, ahol

$$N = \begin{cases} 1000 \text{ az } a) \text{ feladatban} \\ 27 \text{ a } b) \text{ feladatban} \\ 720 \text{ a } c) \text{ feladatban} \end{cases}$$

4. Följegyezzük az S_1, S_2, $\ldots$, S_N élek háromjegyű sorszámait.

Mivel S_i csak „megtoldja" egy jeggyel S_{i-1} -et, elég, ha csak ezt az egy gombot nyomjuk meg. A 4. pont tehát átfogalmazható a következőképpen:

4'. Írjuk S_1 háromjegyű száma után S_2, majd ezután S_3 s. í. t. harmadik számjegyét – egészen S_N -ig. Ily módon egy sorozathoz jutunk, mely $N + 2$ jegyből áll. Ha megvan a sorozat, akkor a jegyei szerint nyomkodva a zár gombjait – minden másodpercben egyet-egyet – $(N + 2)$ másodperc, azaz $t_{\min}$ idő alatt végezhetünk a kérdéses kódok átvizsgálásával; azaz az elfelejtett, a zárat kinyitó számkombináció megtalálása nem tart tovább $(N + 2)$ másodpercnél. Az igazi feladat tehát a megfelelő sorozat gyors elkészítése. Ha ez nagyon sokáig tart, akkor elképzelhető, hogy hősünk még mindig gyorsabban célhoz ér az összes kombináció végigpróbálásával.

1987-12-438-1.eps

7. ábra

Ha például a T_3 irányított gráf e körén a 113-as éltől – tehát a 11-es csúcsból – indulva megyünk végig, akkor az alábbi 29 jegyű sorozatot nyerjük (4.ábra).

113 332 331 322 321 312 311 2 221 211 1

Mivel e kör, a sorozat első és utolsó számjegypárja megegyezik. (Az ilyen számú csúcsból indul ki S_1 és ide fut be S_N .) Ezért ahelyett, hogy sorba írnánk a sorozat $N+2$ jegyét, egy kör kerületére írhatjuk fel az N darab jegyet (p1. a 7. ábrán, ahol $N = 27$).

A 7. ábrán látható kerék peremén felírva (jelölje ezt a kereket B) kilenc egyest, kilenc kettest és kilenc hármast láthatunk sajátos rendben. Ez az elrendezés teljes egészében tartalmazza a b) feladat megoldását. Ehhez hasonló „bűvös" kereket kellene szerkesztenünk, mégpedig gyorsan, az a) és a c) feladatok igazán gyors megoldásához is.

Párbeszéd a bűvös kerekekről

– Lássuk hát, mit is tud ez a bűvös kerék?

– Bármelyik számjegytől indulsz is el, ha negatív irányban haladva minden másodpercben 1 számjegyet olvasol le, akkor 29 másodperc alatt az összes olyan háromjegyű számot megkapod, amelyeket az 1, 2, 3 számjegyekkel lehet felírni.

– Igen, ez kell a megoldáshoz, és ezt tudnia kell a másik két feladathoz készítendő A és C keréknek is, de nem itt van a titok.

– Ellenkező irányban indulva is működik a kerék!

– Valóban, de ez az előzőekből már következik. S ugyanígy teljesülnek T_n minden Euler-körére.

– Ez azt jelenti, hogy a 4. ábra Euler-köre volna a rejtély kulcsa?

– Igen! Ez ugyanis nem az általános recept szerint készült, amely minden szabályos, erősen összefüggő irányított gráfra működik, hanem egy speciális, a T_n szimmetriáját kihasználó algoritmus felhasználásával.

– És vajon mit tud ez az algoritmus?

– $n = 3$ -ra még nem olyan nagy a különbség. De T_{10}-nek már 1000 éle van, Euler-kör keresése pedig az általános módszerrel igen hosszú és munkaigényes feladat – még elektronikus számítógéppel is.

– És ez a speciális algoritmus gyorsabban találja meg e-t?

– Erről van szó ! Az A kerékre például lényegében ezer másodperc alatt tudom felírni az ezer számjegyet! Még elektronikus számítógép sem kell hozzá, elég, ha emlékszem, melyik 3–4 számjegyet írtam fel utoljára. Majdnem olyan egyszerű a dolog, mintha csak a természetes számokat írnám fel egymás után.

– Ilyen gyorsan? Hát a C kerék 720 jegyű sorozata? Azt is ilyen egyszerűen és gyorsan fel tudod írni?

– Igen! Bár ezeket az egyszerű sorozatokat egyáltalán nem volt egyszerű kigondolni ...

... Itt félbeszakítjuk a párbeszédet, nehogy olvasóinkat megfosszuk attól az örömtől, hogy maguk találhassák ki, milyen sorrendben kerüljenek az egyes számjegyek az A és a C kerék peremére – vagy az általános esetben, k-jegyű kódok és n nyomógomb esetén. A szöveg és az ábrák sok mindent elárulnak e sorozatok felépítésének és gyors felírásának titkairól; meglehet, olvasóinknak nem lesz ezekre szükségük és inkább a saját útjukat járják. Sok sikert!

M. L. Gerver, Kvant 87/2, 32–35. oldal

Fordította : *Kende Gábor*