Varsóban, a XXVII. Nemzetközi Matematikai Diákolimpián szerepelt a következő feladat:

*„Egy szabályos ötszög csúcsaihoz egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy összegük pozitív legyen.*

*Megengedett a következő művelet: ha három szomszédos csúcs $x,\ y,\ z$, a hozzájuk rendelt számok $x,\ y,\ z$, és $y<0$, akkor az $x,\ y,\ z$, számok helyére ugyanilyen sorrendben az $x+y,\ -y,\ z+y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet ismételjük addig, amíg csak található negatív $y$. Döntsük el, vajon minden esetben véget ér-e az eljárás véges sok lépés után!"*

A feladatot megfogalmazhatjuk általánosabban is úgy, hogy a szabályos ötszög helyett szabályos $n$-szöget tekintünk ($n\geqq 3$).

A továbbiakban bizonyítást adunk arra, hogy az eljárás – bármely $n$ esetén – véges sok lépés után véget ér.

Gondolatmenetünk a következő lesz: minden szám $n$-eshez egy-egy nem negatív egész számot rendelünk úgy, hogy ez a szám minden egyes „művelet" során csökkenjen. Ha tehát a kezdeti szám $n$-eshez rendelt érték $S_0$, az első „művelet" során keletkező szám $n$-eshez rendelt szám $S_1$, és általában (ha a műveletet $k$-szor végre tudjuk hajtani), a $k$-adik „művelet" során keletkező szám $n$-eshez rendelt szám $S_k$, akkor $S_0>S_1>S_2>\ \dots\ >S_k\geqq 0$ legyen. $S_1,\ S_2,\ \dots,\ S_k$ így csupa különböző, $S_0$-nál kisebb nem negatív egész, ennélfogva $k\leqq S_0$, ami azt jelenti, hogy az eljárás véges sok – legfeljebb $S_0$ darab lépés után véget ér.

Vezessük be a következő függvényeket:

$$\begin{aligned}
p_1(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)&=x_1^2+x_1^2+\ \dots\ +x_n^2\\
p_2(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)&=(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+\ \dots\ +(x_n+x_1)^2\\
p_3(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)&=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+x_3+x_4)^2+\ \dots\ +(x_n+x_1+x_2)^2\\
&\vdots\\
p_{n-2}(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)&=(x_1+x_2+\ \dots\ +x_{n-2})^2+(x_2+x_3+\ \dots\ +x_{n-1})^2+\\
&\quad+\ \dots\ +(x_n+x_2+\ \dots\ +x_{n-3})^2.
\end{aligned}$$

Legyen $(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)$ egy szám $n$-es, amelyben $a_1+a_2+\ldots+a_n>0$ (egy „művelet" során a számok összege nem változik) és legyen például $a_1<0$.

Legyen továbbá $b_1=-a_1$, $b_2=a_2+a_1$, $b_3=a_3$, $b_4=a_4,\ \dots,\ b_{n-1}=a_{n-1},\ b_n=a_n+a_1$ az a szám $n$-es, amely úgy keletkezik, hogy a „műveletet" az $(a_n,\ a_1,\ a_2)$ számokra végrehajtjuk.

Megmutatjuk, hogy

$$p_1(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)-p_1(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)=2a_1(a_1+a_2+a_n),$$

és minden $2\leqq i\leqq(n-2)$-re

$$p_i(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)-p_i(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)=2a_1(a_{i+1}+a_{n-i+1}).$$

Mivel minden $3\leqq j\leqq(-1)$-re $b_j=a_j$, ezért $p_1$ megváltozása valóban

$$\begin{gathered}
p_1(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)-p_1(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)=b_1^2-a_1^2+b_2^2-a_2^2+b_n^2-a_n^2=\\
=\big((-a_1)^2-a_1^2\big)+\big((a_2+a_1)^2-a_2^2\big)+\big((a_n+a_1)^2-a_n^2\big)=2a_1(a_1+a_2+a_n).
\end{gathered}$$

Legyen most $2\leqq i\leqq n-2$ (természetesen csak ha $n\geqq 4$). Ekkor

$$\begin{aligned}
p_i(b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_n)-p_i(a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n)=\sum_{j=1}^{n}[&(b_j+b_{j+1}+\ldots+b_{j+i-1})^2-\\
&-(a_j+a_{j+1}+\ldots+a_{j+i-1})^2].
\end{aligned}$$

Mivel $b_1+b_2+b_n=a_1+a_2+a_n,\ \ b_3=a_3,\ b_4=a_4,\ \dots,\ b_{n-1}=a_{n-1}$, elég azokat a $j$-ket vizsgálni, amelyekre $a_1$, $a_2$, $a_n$ közül egy vagy kettő szerepel az $a_j,\ a_{j+1},\ \dots,\ \ a_{j+i-1}$ számok között; a többire nyilván

$$b_j+b_{j+1}+\ldots+b_{j+i-1}=a_j+a_{j+1}+\ldots+a_{j+i-1},$$

és így

$$(b_j+b_{j+1}+\ldots+b_{j+i-1})^2-(a_j+a_{j+1}+\ldots+a_{j+i-1})^2=0.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy csak négy ilyen $j$ van:

$$j=1,\quad j=2,\quad j=n-i+1,\quad j=n-i+2,$$

és így

$$p_i(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)-p_1(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=(b_1+b_2+\ldots+b_i)^2-(a_1+a_2+\ldots+a_i)^2+$$
$$+(b_2+b_3+\ldots+b_{i+1})^2-(a_2+a_3+\ldots+a_{i+1})^2+(b_{n-i+1}+b_{n-i+2}+\ldots+b_n)^2-$$
$$-(a_{n-i+1}+a_{n-i+2}+\ldots+a_n)^2+(b_{n-i+2}+b_{n-i+3}+\ldots+b_n+b_1)^2-$$
$$-(a_{n-i+2}+a_{n-i+3}+\ldots+a_n+a_1)^2.$$

Mivel

$$b_1+b_2+\ldots+b_i=(a_1+a_2+\ldots+a_i)-a_1,$$
$$b_2+b_3+\ldots+b_{i+1}=(a_2+a_3+\ldots+a_{i+1})+a_1,$$
$$b_{n-i+1}+b_{n-i+2}+\ldots+b_n=(a_{n-i+1}+a_{n-i+2}+\ldots+a_n)+a_1$$

és

$$b_{n-i+2}+b_{n-i+3}+\ldots+b_1=(a_{n-i+2}+a_{n-i+3}+\ldots+a_1)-a_1,$$

ezért

$$(b_1+b_2+\ldots+b_i)^2-(a_1+a_2+\ldots+a_i)^2=a_1^2-2a_1(a_1+a_2+\ldots+a_i)=$$
$$=-a_1^2-2a_1(a_2+a_3+\ldots+a_i),$$
$$(b_2+b_3+\ldots+b_{i+1})^2-(a_2+a_3+\ldots+a_{i+1})^2=a_1^2+2a_1(a_2+a_3+\ldots+a_{i+1})=$$
$$=a_1^2+2a_1(a_2+a_3+\ldots+a_i)+2a_ia_{i+1},$$
$$(b_{n-i+1}+b_{n-i+2}+\ldots+b_n)^2-(a_{n-i+1}+a_{n-i+2}+\ldots+a_n)^2=$$
$$a_1^2+2a_1(a_{n-i+1}+a_{n-i+2}+\ldots+a_n)=$$
$$=a_1^2+2a_1(a_{n-i+2}+a_{n-i+3}+\ldots+a_n)+2a_1a_{n-i+1},$$
$$(b_{n-i+2}+b_{n-i+3}+\ldots+b_1)^2-(a_{n-i+2}+a_{n-i+3}+\ldots+a_1)^2=$$
$$=a_1^2-2a_1(a_{n-i+2}+a_{n-i+3}+\ldots+a_1)=-a_1^2-2a_1(a_{n-i+2}+a_{n-i+3}+\ldots+a_n),$$

és így valóban

$$p_i(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)-p_i(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=2a_1a_{i+1}+2a_1a_{n-i+1}=2a_1(a_{i+1}+a_{n-i+1}).$$

Ezzel a $p_i$ polinomokra vonatkozó állításunkat bebizonyítottuk.

Legyen ezután $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=2p_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)+\sum\limits_{i=2}^{n-2}p_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ (ha $n=3$, akkor $\sum\limits_{i=2}^{n-2}p_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=0$).

Mivel $p_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\geqq 0$, hisz négyzetek összege, ezért nyilván

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)\geqq 0.$$

Az eddigiek alapján

$$f(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)-f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)=2[p_1(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)-p_1(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)]+$$
$$+\sum_{i=2}^{n-2}[p_i(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)-p_i(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)]=4a_1(a_1+a_2+a_n)+$$
$$+\sum_{i=2}^{n-2}2a_1(a_{i+1}+a_{n-i+1})=2a_1(2a_1+2a_2+2a_n+(a_3+a_4+\ldots+a_{n-1})+$$
$$+(a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_3))=4a_1(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

Mivel $a_1<0$ és $a_1+a_2+\ldots+a_n>0$, $f(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)-f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)<0$, azaz $f(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)>(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$.

Az $f$ polinom tehát a szám $n$-esekhez úgy rendel természetes számokat, hogy ezek a számok minden „művelet” során csökkennek (ezt az $x=a_n,\ \ y=a_1,\ \ z=a_2$ esetben láttuk be; az indexelés ciklikus cseréjével azonban a többi esetben is hasonlóan mutatható meg).

Sikerült tehát a szám $n$-esekhez megfelelő nem negatív egészeket rendelnünk és ezzel igazoltuk állításunkat.