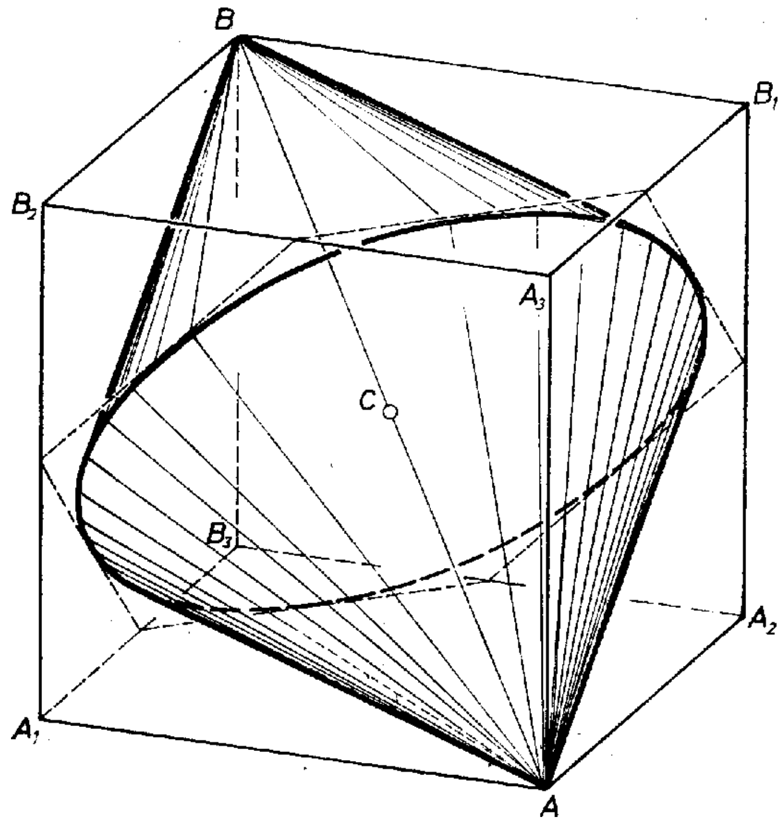
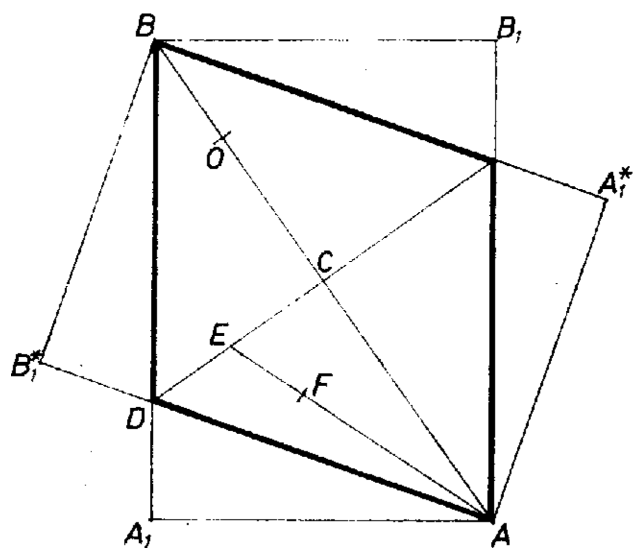
Jelöljük a kocka tengelyül kiszemelt testátlójának végpontjait A-val és B-vel, centrumát C-vel, az A-val szomszédos csúcsait A_1-gyel, A_2-vel, A_3-mal, A_i-nek C-re vonatkozó tükörképét B_i-vel ($i = 1,\ 2,\ 3$). Határozzuk meg először a kocka azon pontjainak a mértani helyét, amelyeket az AB tengely körül tetszőleges szöggel elforgatva ismét a kockához tartozó pontot kapunk. Jelöljük e mértani helyet M-mel, a kockából kivágható, AB tengely körül tetszőleges forgáskúp nyilván M-nek is része.



1. ábra

Vizsgáljuk először M-nek az AB_1BA_1 síkkal alkotott M_0 metszetét. Ez nyilván része az AB_1BA_1 téglalap AB körüli 180°-os forgatásából származó $AB_1^*BA_1^*$ téglalapnak is, megmutatjuk, hogy az M_0 metszet e két téglalap közös része.



2. ábra

Ebből már következik, hogy M-et úgy kapjuk meg, hogy e közös részt AB körül megforgatjuk.

Jelöljük AB_1^* és A_1B metszéspontját D-vel. Elég megmutatnunk, hogy D benne van M_0-ban, hiszen, ha ezt már beláttuk, akkor az, hogy a CD szakasz tetszőleges E pontja és hogy az AE szakasz tetszőleges F pontja M_0-hoz tartozik, következik abból, hogy M_0 konvex, a metszet többi pontja pedig megkapható az ACD háromszög pontjaiból

AB-re, illetve C-re való tükrözéssel (M_0 is és M is nyilvánvalóan szimmetrikus az AB tengelyre és a C centrumra nézve). Az pedig, hogy M_0 konvex, következik abból, hogy konvex alakzatok közös része is konvex, és M_0 a konvex kocka AB körüli forgatásából származó konvex kockák közös részeként keletkező M testnek, és az ugyancsak konvex AB_1BA_1 síknak a metszete. Valóban, ha adott konvex alakzatok tetszőleges serege a térben és a P, Q pontok ezeknek az alakzatoknak mindegyikében benne vannak, akkor a PQ szakasz tetszőleges pontja is benne van az alakzatok közül mindegyikben (hiszen az alakzatok konvexek), tehát a PQ szakasz minden pontja benne van az alakzatok közös részében is.

Lássuk tehát, miért is van benne D az M-ben. D minden esetre benne van az AB szakasz S felező merőleges síkjában, tehát azonos az S sík és a kocka metszetének az A_1B egyenesen levő pontjával. Ismeretes, hogy ez a metszet szabályos hatszög, amelynek a csúcsai az A_1B_2, B_2A_3, A_3B_1, B_1A_2, A_2B_3, B_3A_1 szakaszok felezőpontjai és D e hatszög egyik oldalának a felezőpontja. Tehát D-t AB körül forgatva a hatszögbe írt kört kapjuk, amelynek minden pontja benne van a hatszögben, így a kockában is.

Eredeti célunkra rátérve vizsgáljuk meg most már, mekkora az ABD háromszög AB körüli forgatásából származó M kettős kúpba írható maximális térfogatú kúp. A keresett kúp alapkörének a középpontja rajta van az AB szakaszon, jelöljük O-val. Az általánosság megszorítása nélkül azt is feltehetjük, hogy O az AB szakasz BC felén van. Rögzített O mellett a kúp alapköre már meg van határozva, a közös O-hoz tartozó kúpok közül tehát annak a térfogata a maximális, amelyiknek a magassága maximális, vagyis amelyiknek a csúcsa O-tól legtávolabb van. Mivel e csúcs is rajta van AB-n, csak A lehet (ha O azonos C-vel, B is lehetne, de ez nem jelent lényegesen új lehetőséget). Jelöljük a kocka élét a-val, a kúp magasságát m-mel, alapkörének a sugarát r-rel. Ekkor $AB = a\sqrt{3}$ és hasonló háromszögek alapján kapjuk, hogy

$$r : (a\sqrt{3} - m) = AA_1 : A_1B, \qquad r = \frac{a\sqrt{3} - m}{\sqrt{2}},$$

tehát a kúp térfogata

$$V = \frac{mr^2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} m(a\sqrt{3} - m)^2,$$

ahol $\frac{a\sqrt{3}}{2} \leq m < a\sqrt{3}$. Most már V-nek m szerinti deriváltja,

$$\frac{dV}{dm} = \frac{\pi}{6}\left[(= a\sqrt{3} - m)^2 - 2m(a\sqrt{3} - m)\right] = \frac{\pi}{6}(a\sqrt{3} - m)(a\sqrt{3} - 2m)$$

a mondott szakaszon negatív, V tehát m növelésével monoton fogy, így V akkor maximális, ha m minimális, azaz $m = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, vagyis O azonos C-vel. Ekkor $r = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$, és $V = \frac{\pi}{6} m^3 = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} a^3 = 0{,}34a^3$, ami elég nagy pazarlásnak látszik, de ha arra gondolunk, hogy ilyen kúpot mindjárt kettőt is kivághatunk a kockából, e pazarlás érthetővé válik.