A klasszikus analízis egyik igen hasznos képletét és ennek néhány jellegzetes alkalmazását kívánja megismertetni ez a cikk az olvasóval. Közismertek (többnyire a teljes indukció alkalmazásaként) az

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$1^2+2^2\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

összefüggések. Vajon a negyed-, ötöd-, és általában a magasabb fokú hatványösszegekre nem írhatók fel megfelelő eredmények? Mi történik, ha a kitevő -1, azaz mekkora szám mondjuk $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{100}$? Általánosabban, $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ értéke hogyan becsülhető? Hány jegyű szám a 10-es számrendszerben a $100!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 100$? Milyen gyorsan növekszik az $n!$ sorozat? Az utóbbi kérdések és a rájuk adható válasz az egyetemi matematikatanítás témája, ám ott sem mindig derül ki, hogy a bizonyítások háttere mindig ugyanaz a módszer, Euler nevezetes összegképlete. Az összegképlet és számos alkalmazásának megértéséhez az analízis elemeire van csupán szükség, ezért kezdők számára is meggyőző a módszer hatékonysága.

2. Az Euler–képlet legegyszerűbb esete

A képlethez vezető alapgondolat a következő: tegyük fel, hogy valamely f függvénynek a $0\leqq i\leqq n$ egész számokon felvett értékeinek az összegét akarjuk kiszámítani, azaz az $S=f(0)+f(1)+\ldots+f(n)$ mennyiségre vagyunk kíváncsiak. Az f függvényről kikötjük, hogy elég „jó tulajdonságú”, például a $[0;+\infty)$ intervallumban differenciálható és a deriváltja is folytonos. Az S összeg helyett az $I=\int\limits_0^n f(x)dx$ integrált tekintjük. Ennek persze fogalmilag sokkal bonyolultabb a definíciója, mégis a gyakorlat számára jobban hozzáférhető. Érdemi eredményre persze csak úgy juthatunk, ha lehetőségünk van az $S-I$ „hiba” becslésére.

Az $\int\limits_j^{j+1} f(x)\,dx=\int\limits_j^{j+1} 1\cdot f(x)\,dx$ integrálra alkalmazzuk a parciális integrálás módszerét. Az azonosan 1 függvény $x+c$ primitív függvényében a c állandó értékét válasszuk meg úgy, hogy $f(j+1)$ és $f(j)$ szorzója megegyezzék:

$$\int\limits_j^{j+1} f(x)\,dx=\int\limits_j^{j+1}\left(x-j-\frac{1}{2}\right)' f(x)\,dx=\left[\left(x-j-\frac{1}{2}\right)f(x)\right]_j^{j+1}-$$
$$-\int\limits_j^{j+1}\left(x-j-\frac{1}{2}\right)f'(x)\,dx=\frac{1}{2}\big(f(j+1)+f(j)\big)+$$
$$+\int\limits_j^{j+1}\left([x]-x+\frac{1}{2}\right)\cdot f'(x)\,dx,$$

hiszen a $(j,j+1)$ szakaszon $[x]=j$.

1987-11-338-1.eps

1. ábra

Adjuk össze a $j=0,\,1,\,\ldots,\,(n-1)$ esetben kapott fenti egyenlőségeket, így

$$\int\limits_0^n f(x)\,dx=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1}\big(f(j+1)+f(j)\big)+\int\limits_0^n p(x)f'(x)\,dx$$

adódik, ahol $p(x)=[x]-x+\frac{1}{2}$. Az integrál geometriai jelentése, mint tudjuk, a függvénygörbe és az x tengely közötti (előjeles) terület. A jobb oldalon álló összeg tagjai az 1. ábrán jelzett trapézok területét adják, maga a fenti formula pedig a numerikus integrálásban is jól ismert ún. *trapéz-módszer* képlete. A trapézösszegben az $f(0)$ és $f(n)$ értékek kivételével mindegyik $f(j)$ függvényérték kétszer fordul elő, így eredményünket

$$\int\limits_0^n f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\sum_{j=1}^{n-1}f(j)+\int\limits_0^n p(x)f'(x)\,dx,$$

illetve a

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} f(j)=\int\limits_0^n f(x)\,dx+\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]-\int\limits_0^n p(x)f'(x)\,dx} \tag{1}$$

alakba írhatjuk. Ez a nevezetes *Euler–féle* összegképlet. A 0 és n egész számoknak nincs kitüntetett szerepe, gondolatmenetünk tetszőleges $a\leqq b$ egész számokra a

$$\sum_{j=a}^{b} f(j)=\int\limits_a^b f(x)\,dx+\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]-\int\limits_a^b p(x)f'(x)\,dx \tag{2}$$

képletet adja.

Eredményünk alkalmazhatósága azon múlik, hogy ki tudjuk-e számítani az $\int\limits_0^n f(x)\,dx$ integrált és főleg, hogy tudjuk-e becsülni az $\int\limits_0^n p(x)f'(x)\,dx$ maradéktagot.

3. A harmonikus sor és az Euler–állandó

Foglalkozzunk a bevezetőben felvetett egyik kérdéssel, az ún. harmonikus sor $s_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ részletösszegeinek vizsgálatával. Alkalmazzuk Euler képletét az $f(x)=\frac{1}{x}$ függvényre:

$$s_n=\int\limits_1^n \frac{1}{x}\,dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+\int\limits_1^n p(x)\frac{1}{x^2}\,dx=\log\ n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\int\limits_1^n p(x)\frac{1}{x^2}\,dx.$$

Az $\int\limits_1^n p(x)\frac{1}{x^2}dx$ maradéktagban újra a parciális integrálás módszerét akarjuk felhasználni. Vegyük ehhez szemügyre a $p(x)=[x]-x+\frac{1}{2}$ függvényt. Ez a függvény 1 szerint periodikus, az egész számokban szakad és közöttük egyenes szakasz ábrázolja, mint az a 2. ábrán látható.

1987-11-339-1.eps

2. ábra

Ennek integrálfüggvényét, a

$$q(x)=\int\limits_0^x p(t)\,dt$$

függvényt a 3. ábra szemlélteti.

1987-11-339-2.eps

3. ábra

Mivel $\int\limits_j^{j+1} p(x)\,dx=0$, ezért $q(x)$ is 1 szerint periodikus és parabolaívekből áll (elsőfokú függvény integrálja másodfokú!). A definíció alapján azonnal látható, hogy $q\geqq 0$ és $q(x)<\max\,q(x)=q\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$, továbbá $q(k)=0$ minden k egész szám esetén.

A parciális integrálás képlete szerint

$$\int\limits_1^n p(x)\frac{1}{x^2}\,dx=\left[q(x)\frac{1}{x^2}\right]_1^n+2\int\limits_1^n q(x)\frac{1}{x^3}dx=2\int\limits_1^n q(x)\frac{1}{x^3}\,dx.$$

Ennek alapján

$$s_n = \log\ n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + 2\int_1^n q(x)\frac{1}{x^3}\,dx,$$

és itt már könnyű belátni, hogy a

$$\lim_{n\to\infty} 2\int_1^n q(x)\frac{1}{x^3}\,dx = 2\int_1^\infty q(x)\frac{1}{x^3}\,dx$$

határérték létezik. Valóban, a $2\int_1^n q(x)\frac{1}{x^3}\,dx$ sorozat (n, a felső határ a változó) monoton növekedő, mert $q(x)\frac{1}{x^3} > 0$ és korlátos is, mert

$$2\int_1^n q(x)\frac{1}{x^3}\ dx \leqq 2\int_1^n \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x^3}\ dx = \frac{1}{4}\int_1^n \frac{1}{x^3}\ dx = \frac{1}{8}\left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^n =$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{8}.$$

Így persze a $\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + 2\int_1^n q(x)\ \frac{1}{x^3}\ dx\right) = \frac{1}{2} + 2\int_1^\infty q(x)\frac{1}{x^3}\ dx$ határérték is létezik; ez a szám a nevezetes Euler-féle állandó. Igen sok helyen bukkan elő az analízisben, de ma sem ismeretes, hogy például γ racionális szám-e. Visszatérve s_n előállítására,

$$s_n = \log\ n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + 2\int_1^n q(x)\frac{1}{x^3}dx = \log\ n + \gamma + \frac{1}{2n} - 2\int_n^\infty q(x)\frac{1}{x^3}dx,$$

tehát

$$|s_n - \log\ n - \gamma| \leqq \frac{1}{2n} + 2\int_n^\infty \frac{1}{8}\frac{1}{x^3}dx = \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2},$$

vagyis s_n értéke igen jó közelítéssel $\log n + \gamma$.

4. Az n! és a Stirling-formula

Az $n!$ tanulmányozásához térjünk át a $\log(n!)$ értékre. Persze $\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log\ k$, így most az $f(x) = \log\ x$ függvényre alkalmazzuk az Euler–formulát:

$$\sum_{k=1}^n \log\ k = \int_1^n \log\ x\ dx + \frac{1}{2}\log\ n - \int_1^n p(x)\frac{1}{x}\,dx.$$

Itt $\log x$ integrálja könnyen meghatározható, mert

$$(x\ \log\ x - x)' = \log\ x,$$

tehát a *Newton–Leibniz*-formula szerint

$$\sum_{k=1}^n \log\ k = n\ \log\ n - n + 1 + \frac{1}{2}\log\ n - \int_1^n \frac{p(x)}{x}\,dx.$$

Mint már az előző pontban is láttuk, parciális integrálással

$$-\int_1^n p(x)\frac{1}{x}\,dx = \int_1^n q(x)\frac{1}{x^2}\,dx,$$

és a jobb oldalon megint monoton növekedő korlátos sorozat áll, tehát létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n q(x)\frac{1}{x^2}\,dx = \int\limits_1^\infty \frac{q(x)}{x^2}\,dx$ véges határérték. Bevezetve a $K = 1 + \int\limits_1^\infty q(x)\frac{1}{x^2}\,dx$ jelölést, végül is a

$$\log(n!) = \sum_{k=1}^n \log k = \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + K - \int\limits_n^\infty q(x)\frac{1}{x^2}\,dx$$

képletre jutunk. Ebből

$$n! = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^k \cdot e^{-\int\limits_n^\infty \frac{q(x)}{x^2}\,dx}.$$

Mivel itt

$$\int\limits_n^\infty \frac{q(x)}{x^2}\,dx < \frac{1}{8}\int\limits_n^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{8n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n\to\infty,$$

ezért

$$e^{-\int\limits_n^\infty q(x)\cdot\frac{1}{x^2}\,dx} \to 1,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} n!\frac{e^n}{n^n\sqrt{n}e^K} = 1.$$

Ezt a tényt úgy fejezzük ki, hogy $n!$ *aszimptotikusan egyenlő* az $\frac{n^n}{e^n}\sqrt{n}e^K$ mennyiséggel.

A rejtélyes e^K állandó értéke kiszámítható, az eredmény a még rejtélyesebb:

$$e^K = \sqrt{2\pi}$$

összefüggés, de ennek részleteire most nem térünk ki.

Végül is a Stirling–formula néven ismert $n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ aszimptotikus egyenlőséget, vagy az

$$n! = \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}e^{-\int\limits_n^\infty q(x)\frac{1}{x^2}\,dx}$$

pontos egyenlőséget kapjuk, ennek segítségével pedig $n!$ igen jól és gyorsan számolható. Vegyük például a $100!$ számot. Zsebkalkulátorral is kiszámolható, hogy

$$e^{10} \approx 2{,}718283^{10} \approx 2{,}2\cdot 10^4.$$

Ezért

$$e^{100} \approx (2{,}2)^{10}\cdot 10^{40} \approx 2{,}6\cdot 10^{43}.$$

Ebből

$$\frac{100^{100}}{e^{100}} = \frac{10^{200}}{e^{100}} \approx \frac{10}{2,6}\cdot 10^{199-43} \approx 3{,}8\cdot 10^{156}.$$

Végül

$$\sqrt{2\pi 100}\cdot 3{,}8\cdot 10^{156} \approx 9{,}6\cdot 10^{157}.$$

A $100!$ tehát 157 jegyű szám a 10-es számrendszerben.

5. Hatványösszegek vizsgálata

Foglalkozzunk végül azzal a kérdéssel, hogyan összegezhetjük pozitív egész számok hatványait. Ha a $\sum\limits_{k=1}^n k$ összeg meghatározásakor alkalmazzuk Euler képletét az $f(x) = x$ függvényre, akkor nyilván

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k = \int\limits_0^n x\,dx + \frac{1}{2}n - \int\limits_0^n p(x)\,dx = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Az eredmény közismert, mint ahogyan a négyzetek összegére vonatkozó formula is az, de lássuk megint, hogyan működik a módszer:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \int_0^n x^2\,dx + \frac{1}{2}n^2 - \int_0^n p(x)2x\,dx = \frac{n^3}{3} + \frac{1}{2}n^2 + \int_0^n q(x)\cdot 2\,dx =$$

$$= \frac{n^3}{3} + \frac{1}{2}n^2 + 2n\int_0^1 q(x)\,dx.$$

Definíció szerint $q(x) = \int\limits_0^x \left([t] - t + \frac{1}{2}\right) dt$ és így $0 \leqq x \leqq 1$ esetén

$$q(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} - t\right) dt = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{1}{2}(x - x^2),$$

tehát

$$\int_0^1 q(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x - x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Ezt visszahelyettesítve

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Az Euler-képlet előnye itt az elemi megfontolásokkal szemben elsősorban az, hogy módszeresen vezet el a kívánt összegek kiszámításához, így elvárható, hogy pl. az 5-ik hatványok összegét, a $\sum\limits_{k=1}^{n} k^5$ számot is meghatározhatjuk vele:

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=0}^{n} k^5 = \int_0^n x^5\,dx + \frac{1}{2}n^5 - \int_0^n p(x)\cdot 5x^4\,dx.$$

Hogyan számítsuk most ki az $\int\limits_0^n p(x)5x^4\,dx$ maradéktagot? A $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ összegnél a maradéktag zérus volt, a $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$ összegnél pedig – a már korábban is bevált – parciális integrálást alkalmaztuk. Ezt tesszük a továbbiakban is, ismételt parciális integrálással megszabadítjuk az integrált az x^4 tényezőtől. Ehhez célszerű lesz a p függvény számára egy eltolt integrálfüggvényt választani. A $q(x) = \int\limits_0^x p(t)\,dt$ függvény ugyanis nem örökli a p azon tulajdonságát, hogy a tengely feletti és a tengely alatti részei kiegyenlítik egymást és így $\int\limits_0^1 p(x)\,dx = 0$. Fentebb már láttuk, hogy $\int\limits_0^1 q(x)\,dx = \frac{1}{12}$. Módosítsuk q-t, vezessük be a $p_2(x) = q(x) - \frac{1}{12}$ függvényt. Ekkor még mindig igaz (a (0, 1) intervallumon) a $p_2'(x) = p(x)$ összefüggés és persze $\int\limits_0^1 p_2(x)\,dx = 0$.

Folytassuk ezt az eljárást, definiáljuk rekurzióval a

$$p_1(x),\ p_2(x),\ \ldots,\ p_n(x), \ldots \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

függvénysorozatot a következő módon.

Legyen $p_1 = p$, $p_2 = q - \frac{1}{12}$, és általában, ha p_n már definiált ($n \geqq 0$), akkor legyen p_{n+1} olyan függvény, amelyre

$$p'_{n+1}(x) = p_n(x) \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

és

$$\int_0^1 p_{n+1}(x)\,dx = 0.$$

E két feltétel egyértelműen meghatározza a p_{n+1} függvényt. Jegyezzük meg, hogy a $q_{n+1}(x) = \int\limits_0^x p_n(t)\ dt$ integrálfüggvénnyel kifejezve

$$p_{n+1}(x) = q_{n+1}(x) - \int\limits_0^1 q_{n+1}(x)\, dx.$$

Teljes indukcióval azonnal világos, hogy p_n n-edfokú polinom $[0,\,1]$-en és mivel

$$0 = \int\limits_0^1 p_{n-1}(x)dx = p_n(1) - p_n(0), \quad (n \geqq 2)$$

ezért $p_n(1) = p_n(0)$ $(n \geqq 2)$. Így aztán mindegyik p_n $(n \geqq 2)$ folytonosan és periodikusan kiterjeszthető az egész számegyenesre.

Az imént definiált p_n függvények az ún. *Bernoulli–polinomok* (bár csupán a $[0,\,1]$ szakaszon polinomok). Számítsuk ki a sorozat néhány tagját. Láttuk, $0 \leqq x \leqq 1$ esetén

$$p_1(x) = -x + \frac{1}{2}, \quad p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}.$$

Ekkor

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x + c$$

és

$$0 = \int\limits_0^1 p_3(x)dx = \left[-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{24} + cx\right]_0^1 = c,$$

tehát

$$p_3(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x.$$

Ezután

$$p_4(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^2 + c$$

és

$$0 = \int\limits_0^1 p_4(x)dx = \left[-\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{72}x^3 + cx\right]_0^1 = -\frac{1}{120} + \frac{1}{48} - \frac{1}{72} + c,$$

tehát

$$c = \frac{6 - 15 + 10}{720} = \frac{1}{720},$$

és így

$$p_4(x) = -\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}.$$

Még egy lépéssel továbbhaladva

$$p_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{720}x + c,$$

$$0 = \int\limits_0^1 p_5(x)dx = \left[-\frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{240}x^5 - \frac{1}{288}x^4 + \frac{1}{1440}x^2 + cx\right]_0^1 =$$

$$= \frac{-2 + 6 - 5 + 1}{1440} + c = c,$$

tehát

$$p_5(x) = -\frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{720}x.$$

Észrevehetjük, hogy p_3 és p_5 konstans tagja zérus, és teljes indukcióval igazolható, hogy ez minden páratlan indexű Bernoulli-polinomra igaz (az $n = 1$ eset kivételével), azaz $p_{2n+1}(0) = p_{2n+1}(1) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ebből a periodikus kiterjesztés miatt a $p_{2n+1}(k) = 0$ bármely k egész számra. Térjünk most már vissza az $\int\limits_0^n p(x)5x^4\ dx$ integrál kiszámítására.

$$5\int_0^n p(x)x^4dx = 5\int_0^n p_1(x)x^4dx = 5\big[p_2(x)x^4\big]_0^n - 5\cdot 4\cdot \int_0^n p_2(x)x^3dx =$$

$$= -\frac{5}{12}n^4 - 20\int_0^n p_2(x)x^3dx,$$

hiszen $p_2(0) = p_2(1) = \ldots = p_2(n) = -\dfrac{1}{12}$ a periodikus kiterjesztés miatt. Folytassuk a parciális integrálást:

$$-20\int_0^n p_2(x)x^3dx = -20\big[p_3(x)x^3\big]_0^n - (-20)\cdot 3\int_0^n p_3(x)x^2dx =$$

$$= 60\int_0^n p_3(x)x^2dx,$$

hiszen $p_3(0) = p_3(1) = \ldots = p_3(n) = 0$. Ismét parciális integrálással

$$60\int_0^n p_3(x)x^2dx = 60\big[p_4(x)x^2\big]_0^n - 60\cdot 2\int_0^n p_4(x)xdx =$$

$$= 60[p_4(x)x^2]_0^n - 60\cdot 2\cdot \big[p_5(x)x\big]_0^n + 60\cdot 2\cdot \int_0^n p_5(x)dx = 60p_4(n)n^2 = \frac{60}{720}n^2,$$

hiszen

$$p_4(n) = p_4(0) = \frac{1}{720} \quad \text{és} \quad p_5(n) = p_5(0) = 0.$$

Végül azt kapjuk, hogy

$$5\int_0^n p(x)x^4dx = -\frac{5}{12}n^4 + \frac{1}{12}n^2,$$

tehát

$$\sum_{k=0}^n k^5 = \int_0^n x^5dx + \frac{1}{2}n^5 - \int_0^n p(x)5x^4dx = \frac{n^6}{6} + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 =$$

$$= \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2 + +2n - 1)}{12}$$

lesz a keresett összegző formula.

A fenti példán már jól látszik az általános módszer: A $\sum\limits_{k=1}^n k^j$ összeg kiszámításához fel kell írni a $p_1(x), \ldots, p_j(x)$ Bernoulli polinomokat és az $\int\limits_0^n p(x)jx^{j-1}dx$ integrál ismételt parciális integrálással a $p_i(n)$ számok ismeretében könnyen meghatározható.

Természetesen az ismételt parciális integrálással adódó képlet az $\int\limits_0^n p(x)f'(x)\,dx$ általános esetre is felírható (ha f kellően sokszor differenciálható), és így az Euler-képlet finomított alakjához jutunk, melyben a maradéktag $\int\limits_0^n p_k(x)f^{(k)}(x)\,dx$ alakú integrál lesz. Ezeket a képleteket már nem írjuk le (az olvasó maga könnyen megteheti), most csupán megemlítjük, hogy mind az Euler-képlet (1) alatti alapesetének, mind pedig a finomított változatnak igen sok további érdekes alkalmazása van.