Az iskolában rengeteget foglalkozunk a sík geometriájával. Hasonló geometria építhető föl a gömbön is, amely a gömb felületére rajzolt alakzatokkal foglalkozik. Erről bővebben pl. *Hajós György*: Bevezetés a geometriába c. könyvében olvashattok, most csak néhány gondolatot írok, mintegy kedvcsinálónak.

Válasszunk tehát egy O középpontú G gömböt. Ennek minden síkmetszete kör. Ha a metsző sík átmegy az O ponton, akkor a kör sugara maximális, épp a gömb sugarával egyenlő. Ilyenek pl. a földgömbön az egyenlítő és a hosszúsági körök. Az ilyen maximális köröket hívjuk főköröknek, ezek játsszák majd a gömbön az egyenesek szerepét. Ha például A és B két nem szemközti pont a gömbön, akkor pontosan egy ilyen gömbi egyenes – azaz főkör – köti össze őket, ezt az OAB sík metszi ki a gömbből. Átellenes pontokon keresztül persze végtelen sok főkör halad. (Az északi és déli sarkon minden hosszúsági kör átmegy.) Viszont bármely két főkör két (szemközti) pontban is metszi egymást, „párhuzamos" egyenesek tehát nincsenek a gömbön. Még egy fontos tulajdonságot említek bizonyítás nélkül. Ha A és B tetszőleges pontok, akkor az őket a gömb felszínén összekötő legrövidebb görbe éppen a rajtuk áthaladó főkör (rövidebbik) $\overset{\frown}{AB}$ íve.

Éppen ezért szokás az A és B pontok – gömbi – távolságának az előbbi (legrövidebb) $\overset{\frown}{AB}$ ív hosszát tekinteni. Most és a továbbiakban feltesszük, hogy a gömb sugara egységnyi, és így $\overset{\frown}{AB}$ hossza éppen az $AOB\sphericalangle$ (A szöget radiánban mérjük.) Ezentúl tehát a gömbi hosszúságot egy szöggel azonosítjuk, és így beszélhetünk pl. egy szakasz szinuszáról. Fontos észrevétel, hogy $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$ pontosan akkor teljesül a gömbi távolságokra, ha $\overline{AB} > \overline{CD}$ a térbeli távolságokra. Szemközti pontok távolsága π, minden más távolság ennél kisebb. Láttuk, hogy két szemközti pontot sok főkörív is összeköt.

1987-04-148-1.eps

Rajzoljunk meg két ilyen félkört. Az általuk határolt tartományt (a kettő közül bármelyiket) *gömbkétszög*nek nevezzük. Mindkét félkör meghatároz egy félsíkot, amelynek határoló egyenese az AB. A gömbkétszög szöge legyen a két félsík szöge (ez lehet konkáv szög is, azt a tartományt választjuk, amelyik belsejében tartalmazza a kiszemelt gömbkétszöget). A fentiek alapján határozható meg az AB és AC szakaszok $BAC\sphericalangle$ gömbi szöge. Fontos, hogy ez a szög még nem egyértelmű – hisz a gömbkétszög sem az –, így megegyezünk abban, hogy a gömbön kívülről nézve (az OA félegyenestől) pozitív irányba mérjük a szöget.

Feladat: Határozd meg egy α gömbkétszög területét!

A szakasz és a szög gömbi megfelelője után a gömbön is rajzolunk alakzatokat. A töröttvonal a gömbön is egymáshoz csatlakozó zárt szakaszok sorozata, a sokszögvonal pedig zárt, önmagát nem metsző töröttvonal. Ez persze kettévágja a gömbfelszínt, az így kapott részeket sokszögnek (vagy sokszögtartománynak) hívjuk. Így ugyanahhoz a sokszögvonalhoz két sokszögtartomány is tartozik, meg kell mondanunk, melyikről beszélünk. Megegyezhetünk pl. így: mindig sorrendben adjuk meg a csúcsokat, és ha a gömbfelszínen haladva a megadott sorrendben járjuk be a sokszögvonalat, akkor a bal kéz felőli tartományra gondolunk. (Fordított sorrendnél természetesen a másik tartományt kapjuk.)

Körnek természetesen egy adott ponttól egyenlő gömbi távolságra levő pontok halmazát nevezzük. Könnyen látható, hogy a gömbi körök éppen a gömb síkmetszetei, tehát a régi értelemben is körök.

Gömbháromszögnek azokat a három oldalú sokszögeket hívjuk, amelyeknek minden szöge kisebb π-nél. (Ez a megkötés azért kell, mert pl. így igaz a háromszög-egyenlőtlenség, különben pedig nem.)

Befejezésül belátjuk, hogy minden gömbháromszögnek van beírt köre. Ehhez elég olyan belső pontot találnunk, amely egyenlő távol van mindhárom oldaltól – természetesen gömbi távolságokról van szó. (Egy pont és egy egyenes – azaz főkör – távolsága a ponton átmenő, az adott főkörre merőleges – rövidebb – főkörív hossza.) Húzzunk be két szögfelezőt, azaz olyan főköröket, amelyek egy-egy szöget feleznek. A szögfelező pontjai egyenlő távol vannak a szög száraitól (ezt gondoljátok meg), így a két szögfelező metszéspontja mindhárom oldaltól egyforma gömbi távolságra van és így készen vagyunk. Mint látható, a hagyományos bizonyítás szó szerint volt megismételhető, hisz a felhasznált fogalmakra igazak voltak a síkbeli megfelelőikre teljesülő tételek.

Talán nem meglepő, hogy a gömbháromszögnek van súlypontja, magasságpontja, körülírt köre, de ezeket most nem vizsgáljuk. Búcsúzóul íme három könnyű, de szép feladat:

Rajzolj olyan gömbháromszöget, amelynek mindhárom szöge derékszög.

Lásd be, hogy csak egy ilyen háromszög létezik (a többi egybevágó vele)!

Van-e „téglalap" a gömbön, azaz olyan négyszög, amelynek minden szöge derékszög?