Bevezetés: A pólus, a poláris és tulajdonságaik

A P és Q pontokat a k körre nézve *konjugáltaknak* nevezzük, ha a PQ átmérőjű kör k-val ortogonális helyzetű (1. ábra).

1987-01-009-1.eps

1. ábra

Azoknak a pontoknak a halmazát, amelyek egy adott P pontnak konjugáltjai az O középű, r sugarú k körre vonatkozóan, P *polárisának* nevezzük k-ra nézve.

A továbbiakban rögzítjük a $k(O,r)$ kört és elhagyjuk a „k-ra nézve" kifejezés ismételgetését.

I. tulajdonság (a poláris szerkesztése). Tetszőleges (O-tól különböző) P pont polárisa egyenes, amelyet a 2. ábrán látható módon szerkeszthetünk meg (a számok az egymás utáni szerkesztési lépéseket jelölik).

1987-01-010-1.eps

2. ábra

Ha az l egyenes a P pont polárisa, ezt úgy is mondjuk, hogy P az l egyenesnek *pólusa.*

II. tulajdonság (a pólus szerkesztése). Tetszőleges egyenesnek, amely nem megy át O-n, pontosan egy pólusa van, amit a 3. ábra szerint szerkeszthetünk meg (amennyiben az egyenes metszi a kört; M az egyenes egy külső pontja).

1987-01-010-2.eps

3. ábra

III. tulajdonság (kölcsönösség). Ha a P pont l_p polárisa átmegy egy Q ponton, akkor Q polárisa, l_Q, átmegy P-n.

IV. karakterisztikus tulajdonság. Az M pont akkor és csak akkor van rajta a P pont l_p polárisán, ha

$$OM^2-PM^2=2r^2-OP^2. \tag{1}$$

A tulajdonságok bizonyítását az olvasóra hagyjuk.

A pólus és a poláris fogalmának alkalmazásai

1. *példa* (az érintők poláris tulajdonsága). Ha a P pontból tetszőleges szelőt húzunk a k körhöz, majd a keletkező metszéspont-párokban érintőket húzunk k-hoz, az érintők metszéspontjai egy állandó egyenesen vannak.

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy ez az egyenes éppen P polárisa. Ha P külső pont, akkor az I. tulajdonság alapján ez a P-ből k-hoz húzott érintők C, D érintési pontjait összekötő egyenes.

Legyen PAB egy szelő, az A-ból és B-ből húzott érintők metszéspontja Q (4. ábra; most még nem tudjuk, hogy Q a CD egyenesen van!).

1987-01-011-1.eps

4. ábra

Az AB egyenes az I. tulajdonság alapján Q polárisa. Mivel ezen rajta van P, azért Q is rajta van P polárisán, a CD egyenesen (a kölcsönösségi tulajdonság alapján).

2. *példa* (a szelők poláris tulajdonsága). Ha a Q külső pontból két tetszőleges szelőt húzunk a k körhöz, akkor a keletkező metszéspontok által meghatározott húrnégyszög átlóinak metszéspontja, valamint a Q-t nem tartalmazó oldalegyeneseinek metszéspontja egy, csak a Q-tól függő egyenesre, a Q polárisára illeszkednek.

1987-01-011-2.eps

5. ábra

Bizonyítás. Legyen AC és BD metszéspontja P, AD és BC-é R (5. ábra). Bebizonyítjuk, hogy a P, Q, illetve R pont polárisa rendre QR, PR, illetve PQ, amiből következik az állítás. A QBC, QAC és RAC háromszögek körülírt körei legyenek k_1, k_2, k_3, messék ezek a QR, QP, PR egyeneseket rendre az M, N, S pontban (6. ábra).

1987-01-011-3.eps

6. ábra

Mivel

$$BMR\sphericalangle = BCQ\sphericalangle = BAD\sphericalangle, \tag{2}$$

továbbá

$$ANP\sphericalangle = ACQ\sphericalangle = 180^\circ - DCA\sphericalangle = 180^\circ - DBA\sphericalangle = QBP\sphericalangle$$

és $RAP\sphericalangle = RSC\sphericalangle$, ezért az $MBAR$, $NABP$ és $SCBP$ négyszögek húrnégyszögek.

Ekkor a pont körre vonatkozó hatványának tulajdonságai alapján

$$QM \cdot QR = QB \cdot QA = OQ^2 - r^2, \tag{3}$$

$$MR \cdot QR = RB \cdot RC = OR^2 - r^2, \tag{3'}$$

$$QN \cdot QP = QA \cdot QB = OQ^2 - r^2, \tag{4}$$

$$PN \cdot QP = PC \cdot AP = r^2 - OP^2, \tag{4'}$$

$$RS \cdot RP = RC \cdot RB = OR^2 - r^2, \tag{5}$$

$$PS \cdot RP = PC \cdot AP = r^2 - OP^2. \tag{5'}$$

Ha (3)-at és ($3'$)-t összeadjuk, valamint (4)-ből ($4'$)-t és (5)-ből ($5'$)-t kivonjuk, azt kapjuk, hogy

$$RQ^2 = OQ^2 + OR^2 - 2r^2, \tag{6}$$

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2r^2, \tag{7}$$

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2r^2. \tag{8}$$

(*A fordító megjegyzése.* Az olvasóra hagyjuk a hasonló állítás megfogalmazását és bizonyítását arra az esetre, ha egy a k belsejében levő Q pontból indulunk ki.)

(7) és (8), (6) és (7), illetve (6) és (8) alapján Q és R, illetve P és R, illetve P és Q rajta van P, Q, illetve R polárisán, amiből következik állításunk.

(*A fordító megjegyzése.* Amennyiben az AD és BC egyenesek párhuzamosak, ez a bizonyítás nem alkalmazható, hiszen nem jön létre az R metszéspont.

1987-01-012-1.eps

6.a ábra

Ilyenkor $ABCD$ szimmetrikus trapéz (6/a ábra) és

$$AOB\sphericalangle = 2ADB\sphericalangle = ADB\sphericalangle + ACB\sphericalangle = APB\sphericalangle,$$

és így $ABPO$ húrnégyszög. Ekkor viszont

$$OQ \cdot QP = QA \cdot QB = OQ^2 - r^2.$$

Szorozzuk meg ezt 2-vel és alkalmazzuk a következő összefüggéseket :

$$OQ = QP + OP, \qquad QP = OQ - OP,$$
$$(QP + OP) \cdot QP + OQ(OQ - OP) = 2OQ^2 - 2r^2.$$

Rendezve :

$$QP^2 + OQ^2 - OP(\underbrace{OQ - QP}_{OP}) = 2OQ^2 - 2r^2,$$

azaz

$$QP^2 = OQ^2 + OP^2 - 2r^2,$$

így P rajta van Q polárisán.)

1987-01-013-1.eps

7. ábra

Az eddigi eredményeket összesítve mutatja a 7. ábra; láthatjuk, hány különböző nevezetes pontja van a P (külső) pont polárisának: a T és T' érintési pontok, az $ABCD$ négyszög AD és BC oldalainak, illetve átlóinak metszéspontja (R és Q) és az A, B, illetve C, D pontpárokban húzott érintők metszéspontjai (M és N).

3. *példa* (Brocard tétele). Legyen P, Q, és R a k-ba írt $ABCD$ húrnégyszög átlóinak, illetve szemközti oldalpárjainak metszéspontja. Ekkor a PQR háromszög magasságpontja egybeesik k középpontjával, O-val.

Bizonyítás. Mint az előző feladatban láttuk, P, Q és R polárisa a QR, PR, illetve PQ egyenes. Mivel egy pont polárisa merőleges a pontot O-val összekötő egyenesre, $OP \perp QR$, $OQ \perp PR$ és $OR \perp PQ$, amiből következik, hogy a PQR háromszög magasságpontja O (8. ábra).

1987-01-013-2.eps

8. ábra

4. *példa.* Legyen $X_1X_2X_3X_4$ a k-ba írt húrnégyszög (ebben a körüljárásban konvex), és x_{ij} az X_i-ből és X_j-ből húzott érintők metszéspontja. ($i \neq j$, i, $j = 1$, 2, 3, 4). Ekkor az $X_1X_2X_3X_4$ és az $X_{12}X_{23}X_{34}X_{41}$ négyszögek átlói egy közös pontban metszik egymást.

1987-01-014-1.eps

9. ábra

Bizonyítás. Legyen X_1X_3 és X_2X_4 metszéspontja P, X_1X_2-é és X_3X_4-é Q, X_1X_4-é és X_2X_3-é R (9. ábra). Mivel az X_1X_2 és X_3X_4 szelők átmennek Q-n, P és R rajta van Q polárisán. Mivel pedig X_{12} és X_{34} is rajta van (X_{12} mint az X_1, X_2-beli érintők közös pontja), azért az $X_{12}X_{34}$ egyenes Q polárisa, tehát átmegy P-n.

(Hasonlóan kapjuk, hogy $X_{23}X_{41}$ is átmegy P-n. (Ha X_1X_2 és X_3X_4 vagy X_2X_3 és X_1X_4 párhuzamos, a bizonyítást a „végtelen távoli” egyenessel kiegészített – projektív – síkon érdemes elmondani. *A ford.*)

5. *példa.* A k körön adott öt pont: A, B, C, U és V. Legyen UA és VB metszéspontja M, UB és VA-é M_1, UB és VC-é N, UC és VB-é N_1, UC és VA-é P, UA és VC-é P_1. Ekkor az MM_1, NN_1, PP_1 egyenesek egy ponton mennek át vagy párhuzamosak.

Bizonyítás. Ha a három egyenes párhuzamos, kész vagyunk; ha nem, akkor van köztük olyan – feltehetjük, hogy MM_1 –, amelyik metszi a másik kettőt.

Legyen MM_1 és NN_1 metszéspontja K, MM_1 és PP_1-é K_1. Mivel az $ABVU$ és $BCVU$ négyszögek k-ba vannak írva, ezért K polárisa átmegy az AB és UV, illetve a BC és UV egyenespár metszéspontján (10. ábra). Ebből következik, hogy K polárisa UV.

1987-01-014-2.eps

10. ábra

Hasonlóan kapjuk az $ABVU$ és $ACVU$ négyszögekből, hogy K_1 polárisa átmegy az AB és UV, illetve az AC és UV egyenespár metszéspontján, azaz K_1 polárisa is UV. Eszerint K és K_1 polárisa egyaránt UV, ami csak úgy lehetséges, ha K azonos K_1-gyel.

Azt is könnyen láthatjuk, hogy a három egyenes pontosan akkor párhuzamos, ha UV a k-nak átmérője.

(*A fordító megjegyzése.* Jelen esetben a pólust és a polárist egy speciális kúpszelet (kör) segítségével definiáltuk, és a bizonyításoknál eléggé kihasználtuk az eukleidészi sík speciális tulajdonságait.

A projektív geometriai megközelítésben fordított sorrend is elképzelhető: először bevezetjük a polaritás fogalmát (ez pontot egyenesbe, másfelől egyenest pontba vivő, illeszkedéstartó transzformáció, amely a pontnak megfelelő egyenest visszaviszi a pontba.

Ezután a P pont képét elnevezzük P polárisának (az adott polaritásra nézve), az l egyenes képét l pólusának. Két pontot konjugáltnak nevezünk, ha rajta vannak egymás polárisán, egy pontot pedig önmagával konjugáltnak hívunk, ha rajta van a saját polárisán.

Végül kúpszeletnek nevezzük az önmagával konjugált pontok halmazát.)

Feladatok

1. Adott a k kör és a p egyenes. Az egyenes egy O_1 pontja körül megrajzoljuk a k_1 kört, amelynek sugara egyenlő az O_1-ből k-hoz húzott érintő hosszával. Ez k-t P-ben és Q-ban metszi.

Bizonyítsuk be, hogy ha O_1 végigfut p-n, a PQ húrok egy ponton mennek át vagy pedig párhuzamosak.

2. A $k_1(O_1,\ r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ körök A, B-ben metszik egymást, és $O_1AO_2\sphericalangle = O_1BO_2\sphericalangle = 90°$. Az A, B szakasz meghosszabbításán felvesszük az O pontot és megrajzoljuk a $k(O,\ r)$ kört, ahol r az O-ból k_1-hez (vagy k_2-höz) húzható érintő hossza. Ez k_1-et P_1, Q_1-ben, k_2-t P_2, Q_2-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy a P_1Q_1 és P_2Q_2 egyenes átmegy O_1-n, illetve O_2-n.

A Kvant-ból fordította Kós Géza