

$$(1) \quad t = \varrho^2 + r^2 - d^2.$$

Jelöljük a háromszög csúcsait, szögeit, oldalait, kerületét a szokásos módon, a beírt és a körülírt körök középpontját  $O$ -val,  $K$ -val, ezeknek az  $AB$  egyenesen levő vetületét  $O_1$ -gyel,  $K_1$ -gyel. A  $d = OK$  távolságra Pitagorasz tételéből kapjuk, hogy

$$d^2 = (OO_1 - KK_1)^2 + O_1K_1^2.$$

Itt  $KK_1 = r \cos \gamma$ , és  $AO_1 = s - a$ ,  $AK_1 = \frac{c}{2}$  miatt

$$O_1K_1 = \left| s - a - \frac{c}{2} \right| = \frac{|b-a|}{2}.$$

Ezek szerint (1) jobb oldalának az értéke

$$\begin{aligned} \varrho^2 + r^2 - d^2 &= \varrho^2 + r^2 - (\varrho - r \cos \gamma)^2 - \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 = 2\varrho r \cos \gamma + r^2 \sin^2 \gamma - \left( \frac{b-a}{2} \right)^2 = \\ &= 2\varrho r \cos \gamma + \frac{1}{2}ab(1 - \cos \gamma), \end{aligned}$$

hiszen  $r \sin \gamma = \frac{c}{2}$ , és  $c^2 - a^2 - b^2 = 2ab \cos \gamma$ . Ismeretes, hogy  $\varrho = \frac{t}{s}$ ,  $t = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ , ezek alapján (1) ekvivalens az

$$\frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{abr}{s} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{1}{2}ab(1 - \cos \gamma),$$

vagyis

$$(2) \quad (\sin \gamma + \cos \gamma - 1)(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 2 \sin \gamma \cos \gamma$$

összefüggéssel, hiszen

$$\frac{s}{r} = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma.$$

Vegyük még észre, hogy

$$2 \sin \gamma \cos \gamma = (\sin \gamma + \cos \gamma - 1)(\sin \gamma + \cos \gamma + 1),$$

ennek alapján kapjuk, hogy (2) ekvivalens a

$$(3) \quad (\sin \gamma + \cos \gamma - 1)(\sin \alpha + \sin \beta - \cos \gamma - 1) = 0$$

összefüggéssel. Itt az első tényező értéke akkor és csakis akkor 0, ha  $\gamma = 90^\circ$ , hiszen  $0 < \gamma < 90^\circ$  mellett  $\sin \gamma + \cos \gamma > 1$ , ha pedig  $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ , akkor  $\sin \gamma < 1 - \cos \gamma$ . A másik tényező így alakítható át:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta - \cos \gamma - 1 &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \\ &- 2 \cos^2 \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\gamma}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma}{2} \right). \end{aligned}$$

Itt az első tényező értéke mindig pozitív; a második pedig akkor és csakis akkor lehet 0, ha  $|\alpha - \beta| = \gamma$ , azaz ha vagy  $\alpha = 90^\circ$ , vagy  $\beta = 90^\circ$ . Állításunkat ezzel bebizonyítottuk.