

Jelölje  $f(x)$  az  $\frac{x}{2-x}$  függvényt.

Ekkor

$$g_1(x) = xf(x)$$

és

$$g_{k+1}(x) = xf(g_k(x)), \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Mivel  $f(1) = 1$ , teljes indukcióval adódik, hogy  $g_1(1) = g_2(1) = \dots = g_k(1) = \dots = 1$ .

Az  $f(x)$  differenciálható az  $x = 1$  helyen és így az előbbi eredmény felhasználásával az indukció módszerével azonnal azt is láthatjuk, hogy a  $g_k(x)$  függvények is mind differenciálhatók az  $x = 1$  helyen.

Deriválással

$$g'_{k+1}(x) = f(g_k(x)) + xf'(g_k(x)) \quad g'_k(x),$$
$$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2}, \quad \text{és így } g'_{k+1}(1) = 1 + 2g'_k(1).$$

Vezessük be a  $h_k = g'_k(1) + 1$  jelölést, ekkor

$$h_{k+1} = g'_{k+1}(1) + 1 = 2 + 2g'_k(1) = 2(g_k(1) + 1) = 2h_k.$$

Ebből ismét teljes indukcióval adódik, hogy

$$h_{k+1} = 2^k h_1.$$

De  $h_1 = g'_1(1) + 1 = 4$  és így

$$g'_k(1) = h_k - 1 = 2^{k+1} - 1, \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Ezzel a keresett sorozat elemeit meghatároztuk.