Jelöljük (1)-ben a két oldal különbségének az n-ed részét A_n-nel:

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n} a_i + \frac{n}{3},$$

azt kell megmutatnunk, hogy A_n pozitív. A_n-ben rendre az $\left(a_i - \dfrac{2i-1}{2n}\right)$ különbség négyzetének a kezdő tagjai fordulnak elő, tekintsük tehát e négyzetek összegét:

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{2i-1}{2n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[a_i^2 - \frac{2i-1}{n} a_i + \frac{(2i-1)^2}{4n^2}\right] =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{n} a_i + \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2.$$

Az $(A_n - B_n)$ különbség nem függ az a_i számoktól:

$$C_n = A_n - B_n = \frac{n}{3} - \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2,$$

és mivel B_n nem lehet negatív – hiszen négyzetek összege – elég megmutatnunk, hogy C_n pozitív. Az első n páratlan szám négyzetének az összege könnyen meghatározható a négyzetszámok összegére vonatkozó összefüggés alapján:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} (4i^2 - 4i + 1) = 4 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 4 \sum_{i=1}^{n} i + n =$$
$$= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{(n+1)}{2} + n = \frac{4n^3 - n}{3}:$$

Ennek alapján

$$Cn = \frac{n}{3} - \frac{4n^3 - n}{12n^2} = \frac{1}{12n},$$

ami valóban pozitív:

Kovács Ferenc (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.).

Megjegyzés. Megoldásunkban tulajdonképpen az (1)-nél többet mondó

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} (2i-1) a_i \le n \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + \frac{n^2}{3} - \frac{1}{12}$$

egyenlőtlenséget bizonyítottunk be, és nem használtuk fel az a_i számokra vonatkozó feltételt. Azt is láttuk, hogy (2)-ben akkor és csakis akkor érvényes az egyenlőség jele, ha

$$a_i = \frac{2i-1}{2n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$