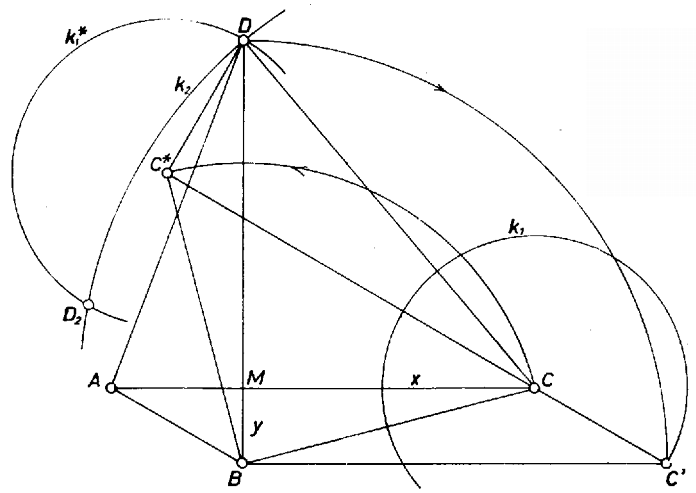
I. megoldás. a) Keressük a kívánt alakzatnak egy olyan módosítását, amelyben kihasználhatjuk az átlók egyenlőségét és merőleges helyzetét. Toljuk el evégett az egyik átlót úgy, hogy valamelyik végpontja essék egybe a másik átló valamelyik végpontjával. Célszerű egybeeső végpontnak B-t vagy C-t választani, mert ezekből a kívánt négyszögnek $2-2$ ismert hosszúságú oldala indul ki, míg A-ból, D-ből csak $1-1$.

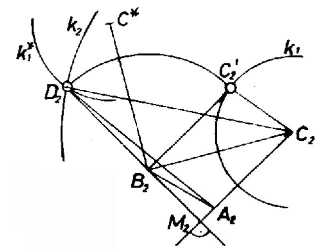
Toljuk el hát az AC átlót az $\overrightarrow{AB}$-ral a BC' helyzetbe (1. ábra).



1. ábra

Így a D pont előáll C'-ből B mint centrum körüli 90°-os elfordítással, másrészt ismerjük mindkét pontnak, és a B-nek is, a C-től való távolságát. Eszerint C-t és B-t egymástól az adott távolságban lerögzítve, a C' és D pontok számára két-két mértani helyet rajzolhatunk meg: a C körüli AB, illetve CD sugarú k_1, ill. k_2 kört, valamint ezeknek B körüli, 90°-kal való elfordítottját, k_2^*-ot, k_1^*-ot, természetesen egymással ellentétes irányú elfordítással. (Az ábrán k_1^* közepe C^*, k_2^*-ot mellőzhetjük.) Ekkor D a k_2 és k_2^* valamelyik közös pontja, ebből C'-t 90°-os visszafordítással kapjuk k_1-en, végül A-t a B-ből a $\overrightarrow{C'C}$-ral való visszatolással.

Az előírt méretek mellett k_2 és k_1^* két pontban metszi egymást, az egyik metszéspontból a négyszög konvexnek adódik (1. ábra), ez tehát megfelel; a másikból (2. ábra, C^*, D_2 és A_2) hurkoltnak, ez nem felel meg.



2. ábra

b) Az átlók hosszát csak az 1. ábra esetében számítjuk, a végzett szerkesztés alapján. A BDC^* háromszögben $C^*D=2$, $C^*B=4$ és a köztük levő szög $CC^*B\sphericalangle=45°$-kal nagyobb, mint a CDC^* háromszög C^*-nál levő szöge. Az utóbbi háromszögben $CC^*=4\sqrt{2}$, így

$$\cos CC^*D\sphericalangle=\frac{(4\sqrt{2})^2+2^2-6^2}{2\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2}=0,$$

a szög 90°, ennélfogva

$$BD^2=BC^{*2}+C^*D^2-2BC^*\cdot C^*D\cos 135°=20+8\sqrt{2},$$

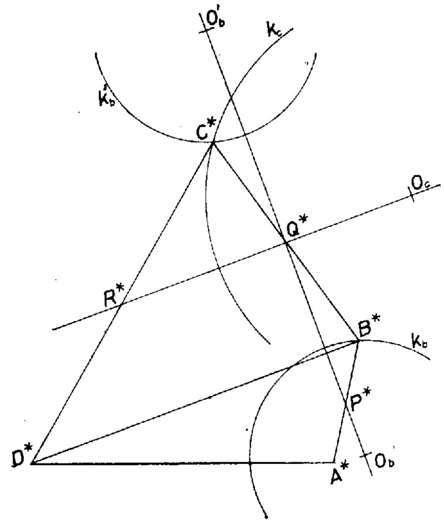
$$BD=5{,}596\ \text{ egység.}$$

II. megoldás a *feladat a) részéhez.* Legyen az AB, BC, CD oldal felezőpontja rendre P, Q, R, ezekre a föltevésekből

$$PQ=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD=QR \qquad \text{és} \qquad PQR\sphericalangle=90°,$$

mert $PQ||AC\perp BD||QR$. Ezek alapján egy tetszőleges $P^*Q^*R^*$ egyenlő szárú derékszögű háromszögből kiindulva a keresetthez hasonló négyszöget szerkesztünk. Felhasználjuk, hogy ábránk bármely nagyított képén $B^*P^*:B^*Q^*=$

$= 1 : 2$, $C^*Q^* : C^*R^* = 2 : 3$, tehát B^* a P^*, Q^* alappontpár $1 : 2$ arányú k_b Apollóniosz-körén van, C^* a Q^*, R^* pár $2 : 3$ arányú k_c, Apollóniosz-körén, és hogy C^* a B^*-nak tükörképe Q^*-ra, tehát C^* a k_b-nek Q^*-ra való k_b' tükörképén is rajta van (3. ábra).



3. ábra

Így k_c, és k_b', közös pontja C^*, ennek tükörképe R^*-ra D^*, a Q^*-ra B^*, végül B^* képe P^*-ra A^*. Végül az $A^*B^*C^*D^*$ négyszöget kellően nagyítjuk vagy kicsinyítjük.

Az átlók kiszámítása ennek a szerkesztésnek az alapján is elvégezhető, pl. abban a koordináta-rendszerben, melynek origója Q^*, és tengelyei átmennek P^*-on, ill. R^*-on.

III. megoldás a feladat b) részéhez. Legyen az átlók hossza d, metszéspontjuk M és egyik-egyik részük $MC = x$, $MB = y$, ahol a konvexség miatt $0 < x < d$ és $0 < y < d$. Ezekre

$$(1)\qquad (d-x)^2 + y^2 = 4,$$

$$(2)\qquad x^2 + y^2 = 16,$$

$$(3)\qquad x^2 + (d-y)^2 = 36.$$

Levonva (2)-t (1)-ből és (3)-ból, x-re, y-ra elsőfokú egyenlet adódik, és abból

$$(4)\qquad x = \frac{d^2+12}{2d}, \qquad y = \frac{d^2-20}{2d}.$$

Ezeket (2)-be beírva d^2-re kapunk másodfokú egyenletet:

$$d^4 - 40d^2 + 272 = 0, \qquad d^2 = 20 \pm 8\sqrt{2},$$

de a kisebbik gyök (4) szerint negatív y-t adna, azt nem használhatjuk. d^2 nagyobbik értéke egyezik az I. megoldásbelivel.