1. Adott az $a_1,\ a_2,\ \ldots$ pozitív számok egy szigorúan monoton növő, nem korlátos sorozata. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan K_0 szám, hogy minden $k > K_0$ esetén

(a) $$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1;$$

(b) $$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985!$$

2. A táblára felírjuk az

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \ldots\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}$$

számokat.

a) Igazoljuk, hogy akárhogyan is írunk $+$ vagy $-$ műveleti jeleket e számok közé, a kapott eredmény nem lehet 0!

b) Legalább hány számot kell letörölni a tábláról ahhoz, hogy a maradó számok közé a $+$ és $-$ jeleket alkalmasan beírva az eredmény 0 legyen?

3. Egy háromszög oldalai egész számok, beírt körének sugara egységnyi. Határozzuk meg a háromszög oldalait!

4. Adott a térben egy S sík és egy rá merőleges e egyenes. Igazoljuk, hogy tetszőleges állású egységkocka S-re vonatkozó vetülete területének mérőszáma megegyezik a kocka e-re vonatkozó vetületének hosszával!

5. Létezik-e olyan F síkbeli halmaz, amellyel nem lehet lefedni egy egységsugarú félkört, de F két példánya már lefed egy egységsugarú kört, ha

a) F tetszőleges;

b) F konvex?

6. Az ABC egységoldalú szabályos háromszöget lefedtük öt egybevágó szabályos H háromszöggel (esetleg átfedésekkel). Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög H-nak már négy példányával is lefedhető!

7. Adott a síkon hat pont, amelyik közül semelyik 3 nincs egy egyenesen. Tekintsük azt a 15 egyenest, amely a hat adott pont közül kettőn átmegy. Legfeljebb hány olyan – az adott pontoktól különböző – pont van a síkon, amelyen a 15 közül három egyenes áthalad?

8. A fehér síkon egy K_0 kék alakzat van. A K_0 alakzatból a K_1 kék alakzat az alábbi szabály szerint képződik, amelyet egyidejűleg alkalmazunk K_0 minden P pontjára: ha a P köré rajzolt egységsugarú kör területének legalább a fele kék, akkor P is kék marad, különben fehér lesz. A következő lépésben a K_1 alakzatból ugyanígy nyerjük a K_2 alakzatot, majd ebből K_3-t, s.i.t.

a) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges K_0 korlátos alakzatból kiindulva véges számú lépés után már az egész sík fehér lesz!

b) Igazoljuk, hogy ha K_0 egy 100 sugarú kör, akkor 1 000 000 lépésen belül az egész sík fehérré válik!

9. Adott 1985 darab súly, rendre $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 1985$ grammosak. Be lehet-e őket 5 csoportba osztani úgy, hogy a súlyok száma is és összege is azonos legyen mind az 5 csoportban?

10. Egy 1×1 méteres, négyzet alakú ketrecben egy tízméteres anakonda van. Münchhausen báró azt állítja, hogy egyetlen lövéssel legalább hat helyen át tudja lőni az anakondát. Nem túloz egy kicsit a báró? (Az anakondát egy tetszőleges tízméteres töröttvonalnak lehet tekinteni, amely egy 1×1 méteres négyzet belsejében van.)

11. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna és 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változik meg a színük. Lehetséges-e, hogy valamennyi idő múlva minden kaméleon azonos színű lesz?

12. Egy 5×5-ös telket 25 darab 1×1-es parcellára osztottunk. Van 25 manó, akik közül mindegyik legfeljebb 3 másikat utál (az utálat kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy a manók elhelyezhetők az egyes parcellákban úgy, hogy egyikük se utálja a szomszédait! (Két parcella szomszédos, ha van közös éle.)

Válogatta : **Erdős László**