Az alábbiakban néhány feladatot közlünk a Szovjetunióban megjelenő Kvant című folyóiratból. A megoldásokat nem kell beküldeni, azonban velük kapcsolatos bármilyen kérdésre válaszol a szerkesztőség.

*

1. Az $ABCD$ négyszög területe T. Bizonyítsuk be, hogy az ABC, BCD, CDA, DAB háromszögek magasságpontjai ugyancsak T területű négyszöget alkotnak.

2. A k_1 és a k_2 körök középpontja O_1 és O_2, a két körlemeznek nincs közös pontja. Az O_1-ből a k_2-höz húzott érintők a k_1-ből, az O_2-ből a k_1-hez húzott érintők pedig a k_2-ből metszenek ki egy-egy körívet. Bizonyítsuk be, hogy ez a két körív egyenlő hosszú.

3. Adott a térben harminc vektor. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, amelyek $45°$-nál kisebb szöget zárnak be!

4. Bizonyítsuk be, hogy olyan egybevágó szimmetrikus trapézokból, amelyek alapjai 1 és 3 egységnyiek, magassága pedig 1 egység, nem lehet téglalapot összeállítani.

5. Egy téglalap „laposságának" a rövidebbik és a hosszabbik oldalának az arányát nevezzük. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is osztunk fel egy négyzetet téglalapokra, ezek laposságainak összege legalább 1.

6. Lefedhető-e egy végtelen „kockás" papír 2×1-es dominókkal úgy, hogy a négyzetrács minden egyenese csak véges sok dominót messen?

7. Egy négyzet alakú papírlapra n darab téglalapot rajzoltunk, amelyek oldalai párhuzamosak a négyzet oldalaival. Semelyik két téglalapnak nincs közös belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy ha kivágjuk ezeket a téglalapokat, akkor a négyzet legfeljebb $n+1$ darabra esik szét.

8. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n természetes szám van, amelyre 2^n jegyeinek összege nagyobb, mint 2^{n+1} jegyeinek az összege.

9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c, d valós számokra

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqq \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

10. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan szigorúan monoton növő, nemnegatív egész értékű a_1, a_2, $\ldots$ a_n $\ldots$ sorozat, hogy minden n, m természetes számra

$$a_{n-m} = a_n + a_m.$$

Válogatta: *Erdős László*, Budapest