Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

I. forduló

1. A következő számokból kihagytunk számjegyeket. Pótolja ki úgy, hogy a kapott szám osztható legyen:
a) 3-mal, b) 4-gyel, c) 6-tal.

$$\square 5\,;\quad 45\square 16\,;\quad 3\square_{(4)}\,;\quad 2\square_{(3)}\,;\quad 4\square 3_{(6)}$$

Az összes megoldást írja le!

2. Bizonyítsa be, hogy az

$$N = 1986 + 2(1 + 2 + \ldots + 1985)$$

szám egy természetes szám négyzete.

3. Adott a térben egy S sík és a rá nem illeszkedő A és B pontok. Melyik a legrövidebb A-t B-vel összekötő útvonal, amely az S síknak legalább egy pontját is tartalmazza?

4. Oldja meg a valós számok halmazán a $\left\{x - \frac{1}{3}\right\} - \frac{1}{2} = 1 - x$ egyenletet! ($\{z\}$ jelenti a szám „tört részét", azaz $\{z\} = z - k$, ahol k a legnagyobb olyan egész szám, amely z-nél nem nagyobb.)

5. Az I.a osztályban kiderült, hogy a félév folyamán 15, 11, 8, 7 és 5 tanuló kapott rendre legalább egy, legalább kettő, legalább három, legalább négy és legalább öt jeles osztályzatot matematikából. Az is kiderült, hogy ötnél több jelest senki sem kapott. Hány jelest osztottak ki matematikából a félév folyamán?

6. Bizonyítsa be, hogy ha az x és y valós számok kielégítik az

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0 \quad \text{és} \tag{1}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0 \tag{2}$$

egyenleteket, akkor $xy - 12x + 15y = 0$.

7. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $CA = CB$, az alap felezőpontja D, a CB száron D merőleges vetülete P és a DP szakasz felezőpontja F. Bizonyítsa be, hogy az $AFPC$ négyszög területe:

$$\frac{CF \cdot AP}{2}!$$

8. Adott egy szimmetrikus trapéz és a belsejében egy P pont. Igazolja, hogy van olyan négyszög, amelynek csúcsai a trapéz oldalain helyezkednek el és a négyszög oldalainak hosszai megegyeznek P-nek a trapéz csúcsaitól mért távolságaival.

Haladók (II osztályosok)

I. forduló

1. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$\Big| x \cdot |x \cdot |x - 2\,||\,\Big| = x^2 - 2x.$$

2. Az ábrán látható $ABCDEFG$ hétszög AG oldalát az O pont két szakaszra osztja; AO mérőszáma k egész szám.

1986-11-353-1.eps

Az O pontból induló OB, OC, OD, OE, OF szakaszok az O középpontú egyenesszöget egyenlő szögekre bontják. Határozzuk meg azt a legkisebb k értéket, amely esetén OG mérőszáma is egész szám.

3. Igazoljuk, hogy $7^{21} - 3^{35}$ osztható százzal.

4. Az $ABCDE$ konvex ötszögben a BC, CD és AE oldalak rendre párhuzamosak az AD, BE, illetve BD átlókkal. Bizonyítsuk be, hogy $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{CD}{BE}$.

5. Mely pozitív egész számokra igaz az alábbi egyenlőség?

$$x^2y - yz^2 - x^2 + z^2 = 30.$$

6. Három kör, amelyek sugarainak aránya 1:2:3, egy síkon páronként kívülről érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az érintkezési pontok által meghatározott háromszögnek van 45°-os szöge!

7. Egy bolha a derékszögű koordináta-rendszer egész koordinátájú pontjain ugrál. Mindig egy szomszédos rácspontra ugrik, függőleges vagy vízszintes irányban. Hány különböző helyen lehet 100 ugrás megtétele után, ha tudjuk, hogy most az origóban van?

8. Összeállítható-e egy 1986×1986-os négyzet az ábrán látható T alakból?

1986-11-353-2.eps

II. forduló

Kezdők (I. osztályosok)

Szakközépiskolai tanulóknak

1. Egy osztály a tanév folyamán három kirándulást szervezett. Az elsőn az osztály 70%-a vett részt, a másodikon 80%-a, a harmadikon 90%-a. Így 12 tanuló háromszor, a többi kétszer kirándult. Hányan vannak az osztályban?

2. Minden négyjegyű természetes számot osszunk el számjegyeinek összegével! Határozzuk meg a hányados legkisebb és legnagyobb értékét!

3. Adott egy négyzet és egy egyenes, amely két olyan négyszögre bontja a négyzetet, amelyek közül az egyik háromszor akkora területű, mint a másik. Bizonyítsa be, hogyha kilenc ilyen egyenest rajzolunk, közülük legalább három egy ponton megy át! Hol lehet ez a pont?

A matematikát általános tanterv szerint tanuló gimnazistáknak

1. Határozzuk meg azokat az a, b, c egész számokat ($a \neq 0$, $a \neq b$), amelyekre a $p(x) = ax^2 + bx + c$ jelöléssel $p(a) = b^2$ és $p(b) = a^2$!

2. Hogyan kell felvenni egy adott szabályos ötszöglemezen három pontot úgy, hogy az ezek által meghatározott háromszög legnagyobb területű legyen? Indokolja állítását!

3. Elhelyezhetők-e egy kör kerületén az 1, 2, …, 12, 13 számok úgy, hogy bármely két szomszédos szám különbsége abszolút értékben legalább 3 és legfeljebb 5 legyen?

A speciális matematika tagozatos gimnáziumi tanulóknak

1. Határozzuk meg azokat az a, b, c egész számokat ($a \neq 0$, $a \neq b$), amelyekre a $p(x) = ax^2 + bx + c$ jelöléssel $p(a) = b^2$ és $p(b) = a^2$!

2. Legyenek a sík egy P pontján átmenő, páronként metsző, O_1, O_2, O_3 középpontú körök P-től különböző közös pontjai: A, B, C! Igazolja, hogy ha A, B és C P-re nem illeszkedő egyenesen vannak, akkor az O_1, O_2, O_3 és P egy kör pontjai!

3. Melyik az a legkisebb n természetes szám, amelyre igaz a következő állítás: bármely n egymás után következő természetes szám közül mindig ki lehet választani egy olyat, amely számjegyeinek összege osztható tizeneggyel!

Haladók (II. osztályosok)

Szakközépiskolások feladatai

1. Jelöljük P-vel az $ABCD$ téglalap AB oldalának A-hoz közelebb eső harmadoló pontját. Tudjuk, hogy a PD szakasz az AC átlóval derékszöget zár be. Határozzuk meg a téglalap oldalainak arányát!

2. A valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto f(x)$ $\big(y = f(x)\big)$ és $x \mapsto g(x)$ $\big(y = g(x)\big)$ lineáris függvényekről a következőket tudjuk:

(a) $$f(x) \cdot g(x) = \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2} - 2 \quad \text{minden valós} \quad x\text{-re},$$

(b) $$f(0) = -g(0)$$

(c) $$f(1) = g(-1)$$

Határozzuk meg a két függvényt!

3. Egy tíz tagú társaság minden tagja legalább hét másikat ismer. Mutassuk meg hogy bármely háromnak van közös ismerőse!

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Legyen k és d pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy ha a k, $k+d$, $k+2d$, … számok között van négyzetszám, akkor végtelen sok is található.

2. Az $ABCD$ téglalap A csúcsából induló szögfelezőjének az ABD háromszögbe eső szakaszán vegyünk fel egy P pontot. A BP és CD, illetve a DP és CB egyenesek metszéspontja legyen E és F. Mutassuk meg, hogy $FB = ED$!

3. Igazoljuk, hogy ha k egynél nagyobb egész szám, akkor a $4k$-nál kisebb, $4k$-hoz relatív prímek összege osztható $8k$-val.

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Az első 1986 pozitív egész számot valamilyen sorrendben egymás mellé írtuk. Kaphatunk-e ilyen módon négyzetszámot?

2. A síkon véges sok egységoldalú négyzetlapot helyeztünk el úgy, hogy oldalaik párhuzamosak. A sík bármely pontját legfeljebb két négyzetlap fedi. Mutassuk meg, hogy a négyzetlapok beoszthatók legfeljebb három csoportba úgy, hogy minden csoportban páronként közös pont nélküli négyzetlapok legyenek!

3. Adott egy 25 jegyű A természetes szám. Egy abc háromjegyű szám „kiolvasható” A-ból, ha A-ban előfordulnak az a, b, c jegyek úgy, hogy a-tól jobbra van b, b-től jobbra van c. Mutassuk meg, hogy van olyan nem 0-val kezdődő, csupa különböző jegyekből álló abc szám, amely nem olvasható ki A-ból!