Első forduló

1. Egy könyv lapjait megszámoztuk 1-gyel kezdve 1986-tal bezárólag. Hányszor fordul elő a számozásban az 1-es számjegy?

2. Ha egy a oldalú négyzetet párhuzamosan vetítünk az egyik oldalával párhuzamos e egyenesre, akkor a vetület $3a$ hosszúságú szakasz lesz. (Síkidom egyenesen való vetületét azok a pontok alkotják, amelyeket a síkidom összes pontján át húzott, egy adott iránnyal párhuzamos egyenesek metszenek ki az adott egyenesből.) Mekkora szöget zárnak be a vetítősugarak az e egyenessel?

3. Határozza meg azokat az a_1, a_2, ..., a_{14} pozitív egész számokat, amelyek kielégítik a

$$3^{a_1} + 3^{a_2} + \ldots + 3^{a_{14}} = 6558$$

egyenlőséget!

4. Az $ABCD$ szabályos tetraéder D csúcsából a szemközti ABC lapra bocsátott merőleges szakasz (magasságvonal) felezőpontját jelölje P. Jelölje továbbá rendre t_{ABC}, t_{ABP}, t_{BCP}, t_{CAP} az ABC, ABP, BCP, CAP háromszögek területét!

Igazolja, hogy

$$t^2_{ABC} = t^2_{ABP} + t^2_{BCP} + t^2_{CAP}.$$

(Szabályos tetraédernek nevezzük azt a háromszög alapú gúlát, amelynek élei egyenlők.)

5. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges a, b, c egész számok esetén az

$$abc(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$

szorzat osztható 80-nal!

6. Határozza meg azoknak az $(x; y)$ pontoknak a halmazát, amelyeknek koordinátáira egyidejűleg fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{gathered} 0 \le x \le 2\pi, \\ 0 \le y \le 2\pi, \\ \cos(x-y) \le \cos(x+y). \end{gathered}$$

7. Az O_1 középpontú k_1 és az O_2 középpontú k_2 kör az A pontban metszi egymást (O_1 a k_2 körön, O_2 pedig a k_1 körön kívül van). Az O_1A egyenes a k_2 kört a K_2 pontban, az O_2A egyenes a k_1 kört a K_1 pontban metszi még egyszer.

Igazolja, hogy $O_1K_2K_1\sphericalangle = O_1O_2K_1\sphericalangle$.

8. Az x_1, x_2, ..., x_n valós számok egyidejűleg kielégítik az alábbi egyenleteket:

$$\begin{aligned} 2x_2 &= x_1 + \frac{2}{x_1}, \\ 2x_3 &= x_2 + \frac{2}{x_2}, \\ &\vdots \\ 2x_n &= x_{n-1} + \frac{2}{x_{n-1}} \\ 2x_1 &= x_n + \frac{2}{x_n}. \end{aligned}$$

a) Bizonyítsa be, hogy $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \ge n\sqrt{2}$.

b) Oldja meg az adott n egyenletből álló egyenletrendszert!

A második forduló feladatai

I. kategória

1. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 + z^2 = 378 \\ x + y + z = 0. \end{gathered}$$

2. Bizonyítsa be, hogy ha egy háromszögben a szögek tangensei számtani sorozatot alkotnak, akkor a szögek kétszeresének sinusai szintén számtani sorozatot alkotnak.

3. Egy üdülő bármely 3 lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást; de bármely 7 között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsa be, hogy n lakó esetén legfeljebb $6n$ tárgy kerül ajándékozásra!

II. kategória

1. Jelölje rendre A, B, C, illetőleg D egy paralelogrammának – valamilyen körüljárás szerint – egymás után következő négy csúcsát!

Legyen E az AB oldalnak az a pontja, amelyre $2 \cdot AE = EB$; F a BC oldalnak az a pontja, amelyre $2 \cdot BF = FC$; G a CD oldalnak az a pontja, amelyre $2 \cdot CG = GD$; végül H a DA oldalnak az a pontja, amelyre $2 \cdot DH = HA$.

Hányadrésze az $ABCD$ paralelogramma területének annak a négyszögnek a területe, amelyet az AG, BH, CE és DF egyenesek zárnak közre?

2. Fessük be egy 3×7 mezőt tartalmazó „sakktábla” minden mezőjét – tetszés szerinti elosztásban – vagy kékkel vagy sárgával!

Nézzük meg ezután ennek a „sakktáblának” valamennyi olyan, $m \times n$ mezőből álló – téglalap alakú – részét, ahol $2 \leq m \leq 3$ és $2 \leq n \leq 7$.

Bizonyítsuk be, hogy ezek között a „résztáblák” között mindig van legalább egy olyan, amelynek mind a négy sarkában azonos színűek a mezők – bárhogyan színeztük is ki „sakktáblánkat”!

3. Oldjuk meg a

$$3^n + 4^n + \ldots + (n+2)^n = (n+3)^n$$

egyenletet a pozitív egész számok halmazán!

III. kategória

1. Egy különböző számokból álló számtani sorozatról tudjuk, hogy kilencedik tagja a második tag köbével egyenlő, továbbá a második tag négyzete és negyedik hatványa is tagja a sorozatnak.

Írjuk fel a sorozat első két tagját!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c, d tetszőleges pozitív számok, akkor

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2.$$

3. Az $ABCD$ tetraéder AB élének hossza a, a CD élé b, az AB és CD élek felezőpontjainak a távolsága k. Mekkora lehet maximálisan a tetraéder térfogata?

IV. kategória

1. Egy tetraéder kitérő élpárjainak felezőpontjait összekötő szakaszok páronként merőlegesek egymásra. Igazolja, hogy a tetraéder magasságvonalai egyenlő hosszúságúak!

2. Az (u_n) (Fibonacci) sorozat definíciója:

$$u_0, \quad u_1 = 1 \quad \text{és} \quad u_{n+2} = u_n + u_{n+1}, \quad \text{ha} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Igazolja, hogy a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_{2^k}}$ sorozat konvergens és számítsa ki a határértékét!

3. Bizonyítsa be, hogy 1-től 1986-ig a természetes számok kiszínezhetők pirossal és kékkel úgy, hogy ne forduljon elő olyan 18 tagú számtani sorozat, amelynek minden eleme azonos színű!