1. Feladat. *Legyen d 2-től, 5-től és 13-tól különböző pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy a $\{2, 5, 13, d\}$ halmaznak van két különböző a, b eleme, amelyre $ab-1$ nem négyzetszám.*

Megoldás. Elegendő belátni a következő állítást: ha d pozitív egész szám, akkor a $2d-1$, $5d-1$ és $13d-1$ számok közül valamelyik nem négyzetszám. Tegyük fel ugyanis ennek ellenkezőjét, vagyis hogy alkalmas a, b, c pozitív egész számokkal

$$2d-1=a^2 \tag{1}$$

$$5d-1=b^2 \tag{2}$$

$$13d-1=c^2. \tag{3}$$

(1)-ből leolvasható, hogy a páratlan. Ekkor a^2 4-gyel osztva 1-maradékot ad, és így d is páratlan. Most (2)-t és (3)-at tekintve adódik, hogy b és c páros. Vonjuk le (3)-ból (2)-t:

$$8d=c^2-b^2, \tag{4}$$

$$2d=\frac{c+b}{2}\cdot\frac{c-b}{2}. \tag{5}$$

Ha b és c közül egyik 4-gyel osztható, másik pedig 2 maradékot ad 4-gyel osztva, akkor (5) jobb oldalának mindkét tényezője páratlan, ez tehát nem lehet. Ha viszont b és c 4-gyel osztva ugyanazt a maradékot adja, akkor (5) mindkét tényezője páros, amiből d páros volta következik. Ez az ellentmondás igazolja állításunkat.

(Benczúr András)

2. feladat. *Adott az $A_1A_2A_3$ háromszög és a síkjában levő P_0 pont. Definiáljuk $s>4$ esetén az A_s pontot így: $A_s=A_{s-3}$. A P_{n+1} pontot úgy nyerjük, hogy a P_n pontot A_{n+1} körül az óramutató járásával megegyező irányban $120°$-kal elforgatjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha P_{1986} és P_0 megegyező pontok, akkor az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.*

1986-11-356-1.eps

Megoldás. Vizsgáljuk meg először azt, hogy három egymást követő elforgatás során mi történik az $\overrightarrow{A_1P_0}$ vektorral. Bármelyik elforgatás a vektor irányát $120°$-kal változtatja, hosszát pedig megtartja. Így ha a három elforgatás utáni $\overrightarrow{A_1'P_3}$ képét tekintjük, akkor $\overrightarrow{A_1P_0}=\overrightarrow{A_1'P_3}$ adódik. Tehát $A_1P_0P_3A_1'$ négyszög paralelogramma, $\overrightarrow{P_0P_3}=\overrightarrow{A_1A_1'}$. Hasonló gondolatmenettel adódik $\overrightarrow{P_3P_6}=\overrightarrow{A_1A_1'}$, általában $\overrightarrow{P_{3k}P_{3k+3}}=\overrightarrow{A_1A_1'}$ minden k természetes számra. Ezért $\overrightarrow{P_0P_{1986}}=$ $=\overrightarrow{P_0P_3}+\overrightarrow{P_3P_6}+\ldots+\overrightarrow{P_{1983}P_{1986}}=662\cdot\overrightarrow{A_1A_1'}$, tehát, mivel $P_0=P_{1986}$, $\overrightarrow{P_0P_{1986}}$ és így $\overrightarrow{A_1A_1'}$ is nullvektor, vagyis A_1 megegyezik A_1'-vel.

Most kövessük nyomon azt, hogyan nyerjük A_1'-t A_1-ből. Az A_1 körüli elforgatás helyben hagyja A_1-et, majd az A_2 körüli $120°$-os elforgatás A_1''-be viszi. A_1''-t pedig az A_3 körüli (az előzővel megegyező irányú) elforgatás viszi $A_1=A_1'$-be. Ezért $A_1A_2A_1''A_3$ négyszög rombusz, melynek A_2-nél levő szöge $120°$-os, így A_1-nél $60°$-os szöge van. Tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög, melynek A_1A_2 és A_1A_3 oldalai egyenlők, valóban szabályos.

(Lipták László)

3. feladat. *Egy szabályos ötszög csúcsaihoz egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy összegük pozitív legyen. Megengedett a következő művelet: ha három szomszédos csúcs X, Y, Z és a hozzájuk rendelt számok x, y, z, és $y<0$, akkor az x, y, z számok helyére ugyanilyen sorrendben az $x+y$, $-y$, $z+y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet ismételgetjük addig, amíg csak található negatív y. Döntsük el, vajon minden esetben véget ér-e az eljárás véges sok lépés után!*

Megoldás. Az eljárás véges sok lépés után minden esetben véget ér, függetlenül attól, hogy milyen sorrendben végezzük el a lépéseket. Legyen az ötszög csúcsaihoz rendelt öt szám kezdetben a_0, b_0, c_0, d_0, e_0, az n-edik „művelet” elvégzése után pedig a_n, b_n, c_n, d_n, e_n. Világos, hogy bármely lépés után a számok egészek maradnak, és összegük nem változik, tehát pozitív marad. Definiáljuk az S_n nem-negatív egész számot így:

$$S_n=(a_n-c_n)^2+(b_n-d_n)^2+(c_n-e_n)^2+(d_n-a_n)^+(e_n-b_n)^2.$$

Ha valamely k természetes számra az a_k, b_k, c_k, d_k, e_k számok között van negatív (mondjuk $c_k<0$), akkor a következő lépés után nyert $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=b_k+c_k$, $c_{k+1}=-c_k$, $d_{k+1}=d_k+c_k$, $e_{k+1}=e_k$ számokra $S_{k+1}<S_k$. Ugyanis behelyettesítéssel

$$S_{k+1}-S_k=2c_k(a_k+b_k+c_k+d_k+e_k),$$

és itt $c_k<0$, $a_k+b_k+c_k+d_k+e_k>0$, mint azt már említettük. Ez pedig azt jelenti, hogy S_0, S_1, S_2, ... szigorúan csökkenő nem negatív egész számok. Így sorozatuk csak véges hosszúságú lehet, vagyis az eljárás véges sok lépésben mindig véget ér.

(Kós Géza)

4. feladat. *Legyenek A és B egy O középpontú szabályos n-szög ($n \geq 5$) szomszédos csúcsai. Egy, az OAB háromszöggel egybevágó XYZ háromszöggel először befedjük OAB-t, majd az X pontot úgy mozgatjuk – mindig az n-szög belsejében –, hogy eközben az Y és Z pontok állandóan az n-szög oldalain legyenek. Milyen alakzatot ír le X, ha Y befutja az n-szög határát (kerületét)?*

1986-11-357-1.eps

Megoldás. Állítjuk, hogy a keresett ponthalmaz n darab zárt szakaszból áll, amelyek hossza $OB\left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)$, és amelyek az n-szög csúcsait O-val összekötő szakaszok O-n túli meghosszabbításai.

Ha Y és Z két szomszédos csúccsal esik egybe, akkor $X \equiv O$; a többi esetben X két szomszédos oldal által határolt kisebbik szögtartományban helyezkedik el (ennek igazolásától most eltekintünk).

Legyen most Y az AB, Z pedig a vele szomszédos BC oldal belső pontja. Ekkor $YBZ\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$, $YXZ\sphericalangle = \dfrac{2\pi}{n}$, e két szög összege tehát π, vagyis az $XYBZ$ négyszög húrnégyszög. Mivel $XY = XZ$, az XBY és XBZ szögekhez egyenlő ívek tartoznak, ezért $XBY\sphericalangle = XBZ\sphericalangle$; az X pont az $YBZ\sphericalangle = ABC\sphericalangle$ szögfelezőjén helyezkedik el.

Vizsgáljuk most meg, mekkora lehet a BZ távolság! Először belátjuk, hogy $BX > OB$. Ugyanis $XYB\sphericalangle + XZB\sphericalangle = \pi$, így közülük az egyik legalább $\dfrac{\pi}{2}$, mondjuk $XZB\sphericalangle \geq \dfrac{\pi}{2}$. De $XBZ\sphericalangle < \dfrac{\pi}{2}$, ezért az XZB háromszögben ezen szögekkel szemben fekvő oldalakra $BX > XZ$ adódik $XZB\sphericalangle > XBZ\sphericalangle$ miatt. És itt $XZ = OB$. Másodszor BX szakasz hosszára felső becslés az $XYBZ$ húrnégyszög köré írható kör átmérője. Ez pedig a szinusztétel segítségével

$$\frac{YZ}{\sin YXZ\sphericalangle} = \frac{OB}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\right)} = \frac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}.$$

Ehhez hozzávéve a megoldás elején említett $X \equiv A$, $Y \equiv B$, $Z \equiv O$ esetet,

$$0 \leq OX \leq \frac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}} - OB = OB\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{n}}-1\right)$$

adódik. Ha pedig gondolatmenetünket elvégezzük a többi szomszédos oldalpárra is, akkor kiderül, hogy X csakis a megoldás elején leírt ponthalmaz pontja lehet.

Hátravan még annak igazolása, hogy az említett halmaz minden pontja megfelelő. Legyen X' a BO félegyenesen úgy, hogy $OB < BX' \leq \dfrac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$. Rajzoljuk meg a B-n és X'-n átmenő, $\dfrac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$ átmérőjű körök valamelyikét (ha $BX' = \dfrac{OB}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$, akkor csak egy ilyen van). Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy ez a kör metszi az AB és BC szakaszokat. Jelöljük ezen metszéspontokat Y'-vel és Z'-vel. Mivel $Y'BX'\sphericalangle = X'BZ'\sphericalangle$, azért $X'Y' = X'Z'$. Másrészt mivel $X'Y'BZ'$ négyszög húrnégyszög, $Y'X'Z'\sphericalangle = \pi - Y'BZ'\sphericalangle = \dfrac{2\pi}{n}$. Ezért az $X'Y'Z'$ háromszög hasonló az ABO háromszöghöz, körülírt köreik pedig ugyanakkorák, ezért a két háromszög egybevágó. Ez a meggondolás bizonyítja, hogy a megadott ponthalmaz minden pontja jó.

(Kós Géza)

5. feladat. *Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a nem–negatív valós számok R_0^+ halmazán van értelmezve, csak nem–negatív valós értéket vesz fel és teljesíti a következő három feltételt:*

$$\begin{aligned}&(a)\ f\big(x\cdot f(y)\big)\cdot f(y) = f(x+y) \quad \textit{minden} \quad x,\ y \in R_0^+ \quad \textit{esetén};\\ &(b)\ f(2) = 0;\\ &(c)\ f(x) \neq 0, \quad \textit{ha} \quad 0 \leq x < 2.\end{aligned}$$

Megoldás. Először két egyszerű megállapítást teszünk. Egyrészt $f(0) = 1$, hiszen az (a) feltételt $x = y = 0$ esetén alkalmazva $f(0) = f\big(0\cdot f(0)\big)\cdot f(0) =$

$= f(0)^2$, tehát $f(0)$ értéke csak 0 vagy 1 lehet, de az első lehetőséget a (c) feltétel kizárja. Másrészt $x \geq 2$ esetén $f(x) = 0$ adódik könnyen, ha az (a) feltételbe $x - 2$ és 2 értékeket írunk: $f(x) = f\big((x-2) \cdot f(2)\big) \cdot f(2) = 0$ a (b) feltétel miatt.

Tegyük fel most, hogy $0 < x < 2$, ekkor persze $0 < 2 - x < 2$ is teljesül, és így az (a) feltételt alkalmazva a $2 - x$ és x számokra $f\big((2-x) \cdot f(x)\big) \cdot f(x) = f(2) = O$ adódik. Itt (c) miatt $f(x) \neq 0$, $\big((2-x) \cdot f(x)\big) = 0$, tehát ismét csak (c)-t alkalmazva a $(2-x) \cdot f(x) \geq 2$, $(x) \geq \dfrac{2}{2-x}$ egyenlőtlenséget kapjuk. A továbbiakban belátjuk, hogy itt egyenlőség áll. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $0 < y < 2$ esetén $f(y) > \dfrac{2}{2-y}$, vagyis $f(y) = \dfrac{2}{2-y} + d$, ahol d pozitív. Ekkor található olyan x pozitív szám, melyre $\dfrac{2}{f(y)} = \dfrac{2}{\dfrac{2}{2-y} + d} < x <$
$< 2 - y$. Erre az x, y párra $x + y < 2$, tehát $f(x+y) > 0$; valamint $x \cdot f(y) > 2$, $f\big(x \cdot f(y)\big) = 0$ áll fenn. Így az (a) feltétel nem teljesül rájuk, és ez az ellentmondás mutatja, hogy valóban minden $0 < y < 2$ esetén $f(y) = \dfrac{2}{2-y}$. Az eddigiek során tehát megállapítottuk, hogy a feladat feltételeinek csak a következő függvény tehet eleget:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{ha} \quad 0 \leq x < 2 \\ 0 & \text{ha} \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy ez a függvény valóban megfelel-e a követelményeknek. Ezt azonban az olvasóra bízzuk, könnyen látható, hogy ez a függvény jó.

(Bóna Miklós)

6. feladat. *Adott a síkban egy véges sok rácspontból álló halmaz. Döntsük el, vajon minden esetben lehetséges-e ezek közül a pontok közül néhányat pirosra, a többit pedig fehérre színezni úgy, hogy minden olyan egyenesen, amely párhuzamos valamelyik koordináta–tengellyel, a rajta lévő piros pontok száma legfeljebb* 1*-gyel térjen el az ugyancsak rajta lévő fehér pontok számától.*

Megoldás. A pontok számára vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy mindig létezik a kívánt színezés. Egy pont esetén az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel tehát, hogy $n \geq 2$, és n-nél kevesebb pont esetén kiszínezhetők a pontok az előírt módon, és megadjuk az n pontnak egy megfelelő színezését.

Könnyű dolgunk van, ha található olyan P pont, melynek sorában további pont már nincs. Ekkor P-t elhagyva a megmaradt $(n-1)$ pontot színezzük ki a megfelelő módon, és ha P oszlopában legalább annyi piros pont van, mint fehér, akkor P-t színezzük fehérre, ha eggyel több fehér pont van, mint piros, akkor pedig pirosra. Ekkor az n pontnak egy jó színezését kaptuk, hiszen P sorában és oszlopában teljesül a feltétel, a többi sorban és oszlopban pedig nem történt változás. Hasonló a helyzet, ha van olyan P pont, melynek oszlopában nincs további pont. Vizsgáljuk tehát azt a fennmaradó esetet, amikor minden pont sorában és oszlopában is van további pont. Ekkor egy tetszőleges A_1 pontból kiindulva, annak sorában választhatunk egy tőle különböző A_2 pontot, A_2 oszlopában A_3-t, A_3 sorában A_4-t, és így tovább felváltva. Minthogy véges sok (n) pontunk van, véges sok lépés után az A_1, A_2, … pontsorozatban olyan tagot kell választanunk, amely már szerepelt. Legyen tehát $A_r = A_p (r > p)$ az első ilyen ismétlődés. Ha $r - p$ páros, akkor az A_p, A_{p+1}, …, A_{r-1} sorozatban minden tag az egyik szomszédjával egy sorban, a másikkal egy oszlopban van (ha A_{r-1}-t és A_p-t is szomszédoknak tekintjük). Gondoljunk utána, hogy ha $r - p$ páratlan, akkor ugyanez mondható az A_{p+1}, A_{p+2}, … A_{r-1} sorozatról. Hagyjuk el tehát ezen sorozat pontjait, a maradékot az indukciós feltétel szerint kiszínezhetjük a kívánt módon, a sorozat pontjait pedig színezzük ezután felváltva pirosra, ill. fehérre. Ekkor az n pontnak egy jó színezését kapjuk, hiszen minden sorban és oszlopban ugyanannyival változtatjuk meg a piros, ill. fehér pontok számát. Ezzel az indukciós lépést elvégeztük, a feladat kérdésére igenlő választ adhatunk.

(Tóth Géza)