A matematikának azt a területét, amelyben geometriai módszerekkel oldunk meg számelméleti problémákat, vagy fordítva, geometriai számelméletnek nevezzük. Ennek az elméletnek egyik legfontosabb eszköze a koordináta-rendszer, alapvető fogalma a négyzetrács (vagy általánosabban a paralelogrammarács). Rácspontnak nevezzük a sík minden olyan pontját, amelynek derékszögű koordinátái egész számok, a négyzetrács pedig a síkbeli rácspontok összessége. Rács-sokszögnek ezután olyan sokszöget nevezünk, amelynek minden csúcsa rácspont.

*

Vizsgáljuk meg először, van-e a síkon szabályos rácsháromszög. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög ilyen, legyen ennek oldala a. Feltevésünk szerint a csúcsok koordinátái egész számok, így a^2 – Pitagorasz tételével kiszámítva – ugyancsak egész. Foglaljuk a háromszöget az 1. ábra szerint egy, a koordináta-tengelyekkel párhuzamos oldalú támasztéglalapba. (Egy konvex tartomány támaszegyenesének nevezünk egy egyenest, ha annak van a tartománnyal közös pontja, és a tartomány minden pontja – a közös pontok kivételével – az egyenesnek ugyanarra az oldalára esik. A támasztéglalap mindegyik oldalegyenese támaszegyenes.)

1986-12-433-1.eps

1. ábra

Az 1. ábra alapján világos, hogy mind a téglalap, mind pedig a téglalapból a háromszög oldalai által levágott derékszögű háromszögek területe racionális szám, ezért a szabályos háromszög területe is az. Ez azonban azt jelentené, hogy az oldal felhasználásával kapott terület $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, szintén racionális. Ez viszont lehetetlen, mert mint láttuk, a^2 egész, és így $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ irracionális szám. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy nem létezik szabályos rácsháromszög.

1. *feladat.* Létezik-e szabályos rácshatszög?

2. *feladat.* Van-e a térben olyan szabályos háromszög, amelynek mindegyik csúcsa rácspont?

*

Négyoldalú szabályos rács-sokszög, rácsnégyzet nyilván létezik. Mi a helyzet nagyobb oldalszám esetén? Megmutatjuk, hogy ha $n=5$ vagy $n>6$, akkor nincs a síkon olyan szabályos n-szög, amelynek csúcsai kivétel nélkül rácspontok.

Bizonyítás közben a négyzetrács alapvető tulajdonságai közül kettőt használunk:

1. Ha egy paralelogramma három csúcsa rácspont, akkor a negyedik is az.

2. A rácsnak egy korlátos síkidom belsejébe csak véges sok pontja eshet.

Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben létezik ilyen S rácssokszög. A 2. ábrán A_1, A_2, …, A_n jelöli ennek csúcsait. Tükrözzük az A_1-et az A_2A_n átlóra. Ha a tükörkép B_1, akkor az 1. tulajdonság alapján B_1 is rácspont. A többi csúccsal hasonlóan járva el, a B_1, B_2, …, B_n rácspontokat kapjuk.

1986-12-434-1.eps

2. ábra

Könnyen igazolható, hogy az $n=5$, illetve $n>6$ esetekben a B_1 pontok az S sokszög belsejének különböző pontjai.

3. *feladat.* Bizonyítsuk be a most kimondott állítást.

Ha most a kapott ábrát az S középpontja körül $360^\circ/n$ szöggel elforgatjuk, akkor nyilván önmagába megy át: a B_i rácspontok tehát ugyancsak egy n oldalú szabályos sokszög csúcsai. Az S rács-sokszög tehát a belsejében tartalmaz egy szabályos n oldalú rács-sokszöget.

A gondolatmenetet újra és újra megismételve tetszőlegesen sok rácsponthoz juthatunk az S belsejében, ami viszont nem lehetséges. Ezzel a bizonyítást befejeztük, az 1. feladat eredményével együtt pedig minden esetben választ adtunk a címben fölvetett kérdésre.

4. *feladat.* Keressünk olyan rácsnégyzetet, amelynek oldalai nem párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel.

5. *feladat.* Bizonyítsuk be az 1. és 2. tulajdonságot a kockarácsban!

Érdeklődő olvasóink figyelmébe ajánljuk *Reiman István* A geometria és határterületei című kitűnő könyvének 14. fejezetét.