Hogyan készíthetünk pontokból számokat?

Ha az egyenes pontjairól van szó, akkor ez nagyon egyszerű. Ha már kiválasztottuk a számolás kiindulási pontját (a „nullát”) és egy irányított szakaszt (az „egységet”), akkor az egyenesből számegyenest készíthetünk, és ezzel az egyenes minden pontjából egy valós számot kapunk, a pont koordinátáját (1. ábra).

1986-11-337-1.eps

1. ábra

A sík pontjainál bonyolultabb a helyzet. Ha megválasztottuk a kiindulási pontot (az origót) és két egymásra merőleges tengelyt, akkor a sík minden pontjához hozzárendelhetjük az $(x; y)$ számpárt, a koordinátáit a síkon. Ahhoz, hogy ezek a számpárok, „dupletek” számként viselkedjenek, meg kell tanulnunk ezeket a dupleteket „összeadni” és „szorozni”, méghozzá úgy, hogy az összeadás és szorzás szokásos tulajdonságai megmaradjanak (kommutativitás, asszociativitás, disztributivitás, az inverz műveletek, a kivonás és osztás létezése).

1986-11-337-2.eps

2. ábra

Az összeadás egyszerű. A dupleteket vektorokként természetes módon adhatjuk össze – koordinátánként (2. ábra):

$$(x;\ y)+(x';\ y')=(x+x';\ y+y'). \tag{1}$$

A szorzással már bonyolultabb a helyzet.[1] Egy nem túl bonyolult formula azonban itt is megadja a megoldást:

$$(x;\ y)\cdot(x';\ y')=(xx'-yy';\ xy'+x'y). \tag{2}$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy a dupletek ezen szorzása az (1) összeadással együtt kielégíti az előzőekben felsorolt szokásos tulajdonságokat. Ily módon a dupleteket az (1) és (2) műveletekkel teljes értékű számhalmaznak tekinthetjük.

Valójában a dupletek nem mások, mint a komplex számok. Általában nem $(x;\ y)$ alakban írják fel őket, hanem $x+y\mathbf{i}$ formában, ahol $\mathbf{i}$ – a képzetes egység $\big($a $(0;\ 1)$ duplet $\big)$, amely a következő érdekes tulajdonsággal rendelkezik: $(\mathbf{i}^2=\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=-1)$. Ez aztán lehetővé teszi a négyzetgyökvonást (a komplex számok körében) negatív számokból.

De hogyan készíthetnénk számokat a tér pontjaiból? Egy koordináta-rendszert bevezetve a pontokat itt is koordinátáikkal lehet megadni, de már nem kettővel, hanem hárommal: $(x;\ y;\ z)$. Ezeket a számhármasokat, tripleteket természetes módon lehet koordinátánként összeadni:

$$(x;\ y;\ z)+(x';\ y';\ z')=(x+x';\ y+y';\ z+z'). \tag{3}$$

A tripleteket majd akkor tekinthetjük számoknak, ha találunk egy módszert a szorzásra, amely a (3) összeadással együtt rendelkezik ennek a két műveletnek a szokásos tulajdonságaival. Többek között, hogy a szorzásnak létezik inverze (osztás a nemnulla elemekkel).

Hogyan lehet hát szorozni a tripleteket? Ez a feladat 1833-ban kezdte el foglalkoztatni Hamilton (1805–1865) ír matematikust. De erről a rendkívüli emberről érdemes külön is szólni.

Hamilton

Hamilton sokoldalú és igen tehetséges ember volt. Tíz éves korában Homérosz sok versét tudta fejből, tizennégy évesen pedig már kilenc nyelvet beszélt. 1824-ben az Ír Királyi Akadémia lapjában jelentette meg a geometriai optikáról szóló munkáját, 1827-ben megkapta Írország királyi csillagászának címét.

1833-ban Hamilton a Dancing-i (Dublin mellett) obszervatórium igazgatójának posztját töltötte be, és sok optikai és analitikus mechanikai munka szerzőjeként volt ismert. A geometriai optika területén elért eredményeiből kiindulva megjósolta a kétszeres kúpszerű törés jelenségét a két tengelyű kristályokban, amelyre aztán kollégája, Lloyd, hamarosan példát is talált.

Egy hosszú évtizeden keresztül próbált Hamilton valamilyen ésszerű szorzást találni a tripletek körében – sikertelenül. Később egy fiának írott levélben így emlékezett erre: „Minden reggel, amikor lejöttem a reggelihez, te és az öcséd, William Edvin, általában megkérdeztétek: Nos, apa, tudsz már tripleteket szorozni? Amire kénytelen voltam mindig bánatosan azt válaszolni: Nem, csak összeadni és kivonni tudom őket.”

Vektorszorzás

A feladat, aminek a megoldásával Hamilton kísérletezett, eleinte egyszerűnek tűnt. Az, hogy hogyan kell összeadni a vektorokat, világos $\big($a (3) formula alapján$\big)$, már csak a szorzás képletét kell megtalálni, valamilyen, a dupletek

[1] A koordinátánkénti $(x;\ y)(x;\ y)=(x\cdot x;\ y\cdot y)$ szorzás nem vezet semmi jóra; az így értelmezett műveletnek nincs inverze. (Például a $(0;2)$ dublettel nem lehet osztani.)