A szelídítő belép az oroszlán ketrecébe. Azonnal látja, hogy a vadállat morcos kedvében van. Az ajtó azonban becsapódott és belülről nem is nyitható, ráadásul senki sincs hallótávolságban. A szelídítő tudja, hogy ő és az oroszlán egyformán gyorsak. Természetesen kíváncsi, vajon

a) van-e olyan stratégiája, amellyel tetszőleges ideig el tud menekülni, függetlenül attól, hogy a bestia mit tesz; vagy

b) létezik-e a (végtelen intelligenciájúnak feltételezett) oroszlán számára olyan stratégia, amelyet követve képes megfogni őt, bármit is tesz ellene?[1]

– Ha a ketrec az egész sík lenne – töpreng az ember bánatosan –, akkor az oroszlán kezdeti helyétől egy egyenes mentén egyre távolodva futnék, és biztos megmenekülnék. De sajnos ott van a rács. Így azután nagyon úgy néz ki, hogy a szelídítőből az állatok királyának tápláléka lesz.

Célunk, hogy felvidítsuk szegényt, és ezért bizonyítjuk, hogy meg tud menekülni (1. tétel). Sőt ha a támadás a Szahara közepén történt volna, még egy pálmafát is ültethetne, és ezt követően tudna úgy mozogni, hogy (i) mindig a fa árnyékában marad, függetlenül ennek méretétől, (ii) útja konvergál egy $S_{\lim}$, ponthoz, és a bestia mindvégig éhen marad. Szinte szükségtelen hozzátenni, hogy emberünk titokban fogja tartani az $S_{\lim}$ pont helyét. Ez már csak azért is könnyen fog menni, mert maga sem tudja, hol lesz ez a pont; ennek helye ugyanis függ az oroszlán mozgásától.

1. Tétel. *Adott pozitív p mellett van a szelídítőnek olyan stratégiája, amelyet követve meg tud menekülni az oroszlán elől és e közben soha nem kerül indulási pontjától p egységnél távolabbra.*

2. Tétel. *Adott pozitív r mellett van a szelídítőnek olyan stratégiája, amelyet követve (i) soha nem kerül a kiindulási helyétől r egységnél messzebbre, (ii) útja konvergál egy ponthoz, amit nem feltétlenül ér el, de eközben az oroszlán nem tudja elfogni.*

Az 1. tétel *A. S. Besicovitch*-tól származik. Az eredeti bizonyítás alapötletét fogjuk használni, de a mi bizonyításunk talán könnyebben követhető.

Az 1. tétel bizonyítása

Jelölje $|PQ|$ a P és Q pontok távolságát. Legyen O_0 és S_0 az oroszlán és a szelídítő kezdeti helyzete. Feltehetjük, hogy $S_0 \neq O_0$. Legyen $p > 0$ adott.

1. A szelídítő választ egy tetszőleges S_1 pontot a ketrec belsejében úgy, hogy az egész S_0S_1 szakasz is a ketrecen belül legyen és teljesülnek a következők:

$$|S_0S_1| < \frac{1}{2}p, \quad |S_0S_1| < \frac{1}{2}|S_0O_0|.$$

Mivel S_1 a ketrec belsejében van, létezik olyan q pozitív szám, hogy $q < \frac{1}{2}p$ és az S_1 középpontú, q sugarú körlemez teljes egészében a ketrec belsejében fekszik. A szelídítő a tőle telhető legnagyobb $v_{\max}$ sebességgel egy egyenes vonal mentén átfut S_0-ból S_1-be. De előbb még átgondolja, hogy útja során az oroszlán nem tudja elkapni, hiszen O-val és S-sel jelölve az oroszlán és a szelídítő helyét egy adott pillanatban, az 1. ábra szerint

$$|OS| \geq |O_0S_0| - |S_0S| - |O_0O| \geq |O_0S_0| - |S_0S| - |S_0S| \geq |O_0S_0| - 2|S_0S_1| > 0.$$

1986-10-295-1.eps

1. ábra

Amíg az ember S_0-ból S_1-be rohan, az oroszlán valamilyen vonalon eljut O_0-ból mondjuk O_1-be. Mielőtt a szelídítő S_1-ből továbbindulna, sürgősen bebizonyítja az alábbi 1. lemmát.

1. Lemma. *Ha* $a_n = 1/n, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$ *akkor*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \infty \quad s \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots \leq 2.$$

Bizonyítás: Mivel

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_{2k} \geq ka_{2k} = \frac{1}{2}$$

minden $k = 1,\ 2,\ \ldots$-re, az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ végtelen sorban van végtelen sok diszjunkt, egymás utáni számokból álló blokk, melyek összege legalább 1/2. Így világos, hogy a sor divergens.

[1] Itt, elvben, még egy lehetőség van: akár a szelídítő, akár az oroszlán választ stratégiát, a másik tud nyerni a stratégia ellen. Bár szinte magától értetődő, hogy ez esetünkben nem lehetséges, ennek szigorú bizonyítása lényegesen meghaladná lapunk kereteit. – Szerk.

Másrészt ha $N=2,\ 3,\ \ldots$, akkor

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_N^2\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(N-1)N}=$$
$$=1+\left(1-\frac12\right)+\left(\frac12-\frac13\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac1N\right)=2-\frac1N<2.$$

Miután a szelídítő bizonyította a lemmát, egy darab krétával, amit az oroszlán volt szíves odadobni neki, gondosan megjelöli a ketrec padlóján az S_1 pontot.

2. Tegyük fel, hogy emberünk épségben (anélkül, hogy az oroszlán elfogyasztotta volna) elérte az $S_0,\ S_1,\ S_2,\ \ldots,\ S_n$ pontokat valamilyen n természetes számra. Jelölje O_n azt a pontot, ahol az oroszlán tartózkodik, amikor a szelídítő S_n-ben van. Emberünk sietve bebizonyítja a 2. lemmát:

2. Lemma. *Ha a szelídítő maximális sebességgel fut S_n-ből az S_nO_n szakaszra merőleges e egyenes mentén, az oroszlán nem tudja utolérni.*

Bizonyítás: Legyen O', S' az oroszlán, illetve a szelídítő helyzete (2. ábra).

1986-10-296-1.eps

2. ábra

Ekkor
$$|O'S'|\ge|S'O_n|-|O_nO'|\ge|S'O_n|-|S_nS'|>0.$$
Az oroszlánszelídítő és a matematikai pontosság szempontjából egyaránt életbevágó, hogy az utolsó egyenlőtlenség $>$ és nem $\ge$.

A lemma bizonyítása után a szelídítő maximális sebességgel szalad az e egyenesen $\frac12 a_nq$ távolságra, úgy választva meg az irányt, hogy ha csak az előzőleg megjelölt S_1 pont nincs rajta véletlenül az S_nO_n egyenesen, futás közben eleinte közeledjen hozzá. (3. ábra).

1986-10-296-2.eps

3. ábra

(Pillanatnyilag még fél attól, hogy futás közben nekimegy a ketrecnek és összetöri magát, amivel az oroszlán szabad prédájává válik. A 3. lemma szerencsére eloszlatja ebbéli aggályát.)

Ha ezt a szabályt követi, a 2. lemma szerint az oroszlán nem tudja elkapni. Útjának hossza összesen

$$|S_0S_1|+\frac12 q(a_1+a_2+a_3+\ldots),$$

ami az 1. lemma szerint végtelen. És mivel $v_{\max}$ véges, a leírt mozgás a végtelenségig tart. Már csak azt kell megmutatnunk, hogy az S_n pont valóban a ketrec belsejében van. Ez következik abból, ha megmutatjuk, hogy

$$|S_1S_n|<q,\quad n=1,\ 2,\ \ldots,.$$

3. Lemma.
$$|S_{n+1}S_1|^2-|S_nS_1|^2\le\left(\frac12 a_nq\right)^2\quad n=1,\ 2,\ \ldots,.$$

Bizonyítás: Jelölje d_n az S_1 pontnak az S_nO_n egyenestől vett távolságát, és Q_n az S_1 merőleges vetületét az e egyenesen.

1. eset $d_n\le\frac12 a_nq$ (4. ábra). Ekkor

$$|S_{n+1}S_1|^2=|S_{n+1}Q_n|^2+|Q_nS_1|^2\leqq\left(\frac12 a_nq\right)^2+|S_nS_1|^2.$$

1986-10-297-1.eps

4. ábra

1986-10-297-2.eps

5. ábra

2. eset. $d_n > \dfrac{1}{2}a_n q$ (5. ábra). Ekkor

$$|S_{n+1}S_1|^2 \le |S_nS_1|^2 < |S_nS_1|^2 + \left(\frac{1}{2}a_n q\right)^2.$$

Ezzel a 3. lemmát be is bizonyítottuk.

A lemmában n helyébe $1,\ 2,\ \ldots,\ m-1$ értékeket helyettesítve adjuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$|S_mS_1|^2 \le \left(\frac{1}{2}q\right)^2 \ (a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_{m-1}^2) < \left(\frac{1}{2}q\right)^2 \ (a_1^2 + a_2^2 + \ldots) \le \frac{1}{2}q^2 < q^2,$$

és így $|S_mS_n| < q$. Ezek szerint q választása miatt az egész $S_0S_1S_2\ldots$ út a ketrec belsejében fekszik. Tehát valóban megmentettük az oroszlánszelídítőt. Végül vegyük észre, hogy

$$|S_0S_m| \le |S_0S_1| + |S_1S_m| \le \frac{1}{2}p + q < p.$$

A 2. tétel bizonyítása

Egy alkalmasan választott délibáb segítségével a szelídítő könnyedén elképzelheti, hogy az oroszlánnal együtt egy ketrecben vannak, és így különböző S_0 és p értékekre alkalmazhatja az 1. tételt. Legyen a szelídítő kiindulási pontja S^0 és legyen az 1. tételben $S_0 = S^0$, $p = \dfrac{1}{2}r$. Használjuk a már leírt stratégiát egészen addig, amíg az ember által megtett út hossza el nem éri az s-et, ahol s egy tetszőleges, de rögzített természetes szám. Jelölje S^1 azt a pontot, ahová így eljutott. Most változtassuk meg a stratégiát az $S_0 = S^1$, $p = \dfrac{1}{4}r$ értékeknek megfelelően. Ezt ismét csak addig kövessük, amíg az ebben a fázisban megtett út hossza az S^2 pontnál eléri az s-et. Most megint megváltoztatjuk az eljárást az $S_0 = S^2$, $p = \dfrac{1}{8}r$ választásnak megfelelően, és emellett is kitartunk egy újabb s hosszú út erejéig stb.

Az így menekülő embert az oroszlán az egyes részfutamokban az 1. tétel szerint nem éri utol, az út összhossza összesen $s + s + s + \ldots$, vagyis a szelídítő örök időkre megmenekül.

Állítsuk meg emberünket S^k-ból S^{k+1} felé futtában egy P pontban azért, hogy megvizsgálhassuk helyzetét. Hogy ez ne okozzon gondot a menekülésben, tekintsük e művelet idejét nullának. Vegyük észre, hogy

$$|S^0P| \le |S^0S^1| + |S^1S^2| + \ldots + |S^kP| \le \frac{1}{2}r + \frac{1}{4}r + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}r < r,$$

és így állandóan élvezheti a pálmafa árnyékát, feltéve, hogy r elég kicsi,

Még azt kell bizonyítani, hogy a szelídítő pályája konvergens. Minden S^k utáni fázisban, mikor emberünk mondjuk S^α és $S^{\alpha+1}$ között egy Q pontban van,

$$|S^kQ| \le |S^kS^{k+1}| + |S^{k+1}S^{k+2}| + \ldots + |S^{\alpha-1}S^\alpha| + |S^\alpha Q| \le$$
$$\le r\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha+1}\right) < r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

ami tetszőlegesen kicsi, ha k elég nagy. Felhasználva *Cauchy konvergencia kritériumát*, következik, hogy az út konvergál egy ponthoz. Magát a kritériumot ezen a szinten nehéz volna pontosan megfogalmazni, mert lényegesen túlhaladná ennek a kis jegyzetnek a kereteit.

Tanulság: Ha egy oroszlánnal kerülnél szembe, semmi ok az aggodalomra, feltéve hogy akármilyen kicsire össze tudod húzni magad, és akármilyen nagy gyorsulást el tudsz viselni.