A múlt havi számunkban kitűzött feladatok egyikében a következő játék szerepelt: Egy ötször ötös négyzetrács minden pontjában van egy lámpácska, amely nyomógombként is működik. Ha valamelyik gombot megnyomjuk, akkor az ebben levő lámpa, valamint mindazok, amelyek a megnyomott gombbal oldal mentén szomszédosak, állapotot váltanak, tehát amelyik korábban égett, az a nyomás hatására elalszik, amelyik pedig korábban nem égett, az kigyullad. Kezdetben egyetlen lámpa sem világít. Elérhetjük-e, hogy valamennyi lámpa világítson, illetve, hogy csak a bal alsó sarokban levő lámpa égjen?

Ez a játék számos érdekes matematikai problémát vet fel. Ebben a cikkben ezek egy részével foglalkozunk.

Először is vegyük észre, hogy egy adott lámpa a játék végén akkor és csakis akkor fog világítani, ha a játék során páratlan sok szomszédját nyomtuk meg, önmagát is beleértve. Ebből látszik, hogy ha egy gombot a játék során kétszer is megnyomunk, akkor a végeredményen nem változtat, ha mindkét nyomást elhagyjuk. Eszerint feltehető, hogy minden gombot legfeljebb egyszer nyomunk meg. Észrevételünkből látszik, hogy a lenyomások sorrendje sem befolyásolja a végeredményt. Így tehát minden próbálkozás lényegében egyértelműen leírható úgy, hogy az egyes gombokról megmondjuk, hogy megnyomjuk-e őket vagy sem.

Ezek alapján bevezethetjük a következő jelöléseket. Jelöljük a gombokat (és egyben a lámpákat is) $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$-tel az 1. ábra szerint. Egy X *lenyomásmintát* ezután az $x_1, x_2 \ldots, x_{25}$ számokkal írunk le, ahol $x_i = 1$ akkor, ha az a_i gombot megnyomjuk, és 0 akkor, ha nem. Minden X lenyomásminta egyértelműen meghatároz egy Y világításmintát, amit hasonlóan írhatunk le az $y_1, y_2, \ldots, y_{25}$ számokkal, azaz $y_i = 1$, ha az X *lenyomásminta* lenyomása után az a_i lámpa ég, és 0, ha nem.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1. ábra

Valamennyi lámpa kigyújtása olyan X lenyomásminta meghatározását jelenti, amelynek megfelelő világításmintában minden i-re $y_i = 1$. Vegyük észre, hogy ha egy lenyomásminta első sorát (tehát az x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 számokat) tetszőlegesen lerögzítjük, akkor a lenyomásminta második sorának elemeit már csak egyféleképpen választhatjuk meg úgy, hogy a világításminta első sorában minden lámpa égjen. Ezután már a lenyomásminta harmadik sora is csak egyféle lehet, ha azt akarjuk, hogy a világításminta második sorában is égjenek a lámpák. Továbbmenve, a lenyomásminta negyedik, majd ötödik sora is hasonlóképpen egyértelmű, és ezután már több szabadságunk nincs: az adott $(x_1, \ldots, x_5)$ kezdet csak egyféleképpen folytatható úgy, hogy a kapott lenyomásmintához tartozó világításmintában az első négy sor minden lámpája égjen, és ezzel az is egyértelműen van meghatározva, hogy az ötödik sorban mely lámpák égnek és melyek nem.

Ha tehát a fenti kitöltést valamennyi lehetséges $(x_1, \ldots, x_5)$ szám ötösre elvégezzük, akkor megkapjuk az összes olyan lenyomásmintát, amikor a megfelelő világításmintában az első négy sor összes lámpája ég. Ilyen kezdő számötös $2^5 = 32$ van (mivel minden x_i egymástól függetlenül lehet 0 vagy 1). E 32 kezdősor végigpróbálása után négy olyan lenyomásmintát kapunk, aminek megfelelő világításmintában az utolsó sor lámpái is égnek. Ezek (2. ábra) tehát a kitűzött feladat *b*) részének összes megoldásai. (Az ábrán látható, hogy a megoldások egymás elforgatottjai.)

$$
\begin{matrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&1\\ 0&0&1&1&1\\ 0&1&1&1&0\\ 0&1&1&0&1 \end{matrix}
\qquad
\begin{matrix} 0&0&0&1&1\\ 1&1&0&1&1\\ 1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&0&1&1&0 \end{matrix}
\qquad
\begin{matrix} 1&0&1&1&0\\ 0&1&1&1&0\\ 1&1&1&0&0\\ 1&1&0&1&1\\ 0&0&0&1&1 \end{matrix}
\qquad
\begin{matrix} 0&1&1&0&1\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 1&1&0&1&1\\ 1&1&0&0&0 \end{matrix}
$$

2. ábra

Ha már az ember kezében vannak a lámpácskák, kíváncsi rá, hogy elkészíthető-e tetszőleges világításminta. Abból, hogy négy különböző lenyomásminta is ugyanazt a (csupa 1-esből álló) világításmintát adja, azonnal következik, hogy van olyan világításminta, amelyet egyetlen lenyomásminta sem hoz létre, hiszen az összes világításminták száma ugyanannyi, mint az összes lenyomásminták száma: 2^{25}. Azonban ennél többet is mondhatunk.

Nevezzük két lenyomásminta összegének azt a lenyomásmintát, amit a két minta egymás utáni végrehajtásaként kapunk a bevezetőben említett egyszerűsítés figyelembevételével. Az összegben tehát akkor kell megnyomnunk egy gombot, ha ezt a gombot az összeadandó minták közül pontosan az egyikben nyomjuk meg. A lenyomásmintákat jellemző 0–1 sorozatok nyelvén ez éppen az elemenként vett, modulo 2 összeadást jelenti. Az is látszik, hogy lenyomásminták összege a megfelelő világításminták összegét gyújtja ki.

Ha most páronként összeadjuk a 2. ábra lenyomásmintáit, akkor olyan lenyomásmintákat kapunk eredményül, amelyek hatására egyetlen lámpa sem világít.

Nevezzük az ilyen lenyomásmintákat *0-lenyomásmintáknak*. A 2. ábra négy mintája között $\binom{4}{2} = 6$-féle összeadás végezhető el, de az összegek közül csak három különböző. Ezek a 0-lenyomásminták láthatók a 3. ábrán. Ha ehhez a három mintához még hozzávesszük a triviális 0-lenyomásmintát is (amikor egyetlen gombot sem nyomunk le), akkor egyelőre 4 különböző 0-lenyomásmintánk van. Megmutatjuk, hogy több 0-lenyomásminta nincs.

0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0

1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	0	0	0
1	1	0	1	1

1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1

3. ábra

Ha egy X mintához hozzáadunk egy 0-lenyomásmintát, akkor az eredményként kapott lenyomásmintához tartozó világításminta ugyanaz lesz, mint az X-hez tartozó. Ha tehát lenne még egy ötödik 0-lenyomásminta is, akkor azt hozzáadva a 2. ábra (pl.) első megoldásához, szintén megoldást kellene kapnunk. Azt viszont már tudjuk, hogy a feladat összes megoldása a 2. ábrán látható, így tehát az összeadás eredményeként a 2. ábra valamelyik másik mintáját kell megkapnunk. Mivel a minták összeadása asszociatív, és tetszőleges X és X' mintára $(X + X') + X' = X$, a 2. ábra két szóban forgó mintájának összege az új, ötödik 0 benyomásminta. Az ilyen összeadások eredményei azonban a 3. ábrán láthatók, ötödik 0-lenyomásminta tehát valóban nem létezik.

Az eddigiekből következik, hogy ha egy világításminta előállítható, akkor az pontosan négyféleképpen állítható elő: úgy, hogy az őt előállító bármely lenyomásmintához hozzáadjuk a 0-lenyomásmintákat. Eszerint a 2^{25}-féle világításmintának legfeljebb az 1/4-e lehet kigyújtható. A valóban kigyújtható minták száma azonban nem lehet ennél kevesebb sem, mert egyébként volna olyan minta, amelyet a 2^{25} darab lenyomásminta közül négynél több állítana elő.

Nyitva maradt persze a kérdés, hogy miképpen lehetne valahogy egyszerűen jellemezni 2^{23} darab valóban előállítható mintát. Ezzel kapcsolatos a kitűzött feladat $a)$ része.

A kérdés vizsgálatához próbáljuk meg a játékot a „negyedére korlátozni”, azaz tekintsük azt a játékot, amely csak az $a_1, a_2, \ldots, a_{23}$ lámpákból áll, és nézzük meg, hogy ennek megoldásai hogyan hatnak a_{24}-re és a_{25}-re. Az eredeti feladat megoldásához hasonlóan megmutatható, hogy a 23-lámpás játékban csak a triviális 0-lenyomásminta létezik, és így minden világításminta valóban létre is hozható.[1]

A 23-lámpás játékban tehát minden a_i gombhoz van olyan lenyomásminta (méghozzá egyetlen), amelyik csak az a_i lámpát gyújtja ki. Most vizsgáljuk meg, hogy ezek a 23-gombos lenyomásminták hogyan hatnak az eredeti játék a_{24} és a_{25} lámpáira. A 4. ábrán látható például az a lenyomásminta, ami a 23-lámpás játékon csak az a_1-et gyújtja ki. Látható, hogy a 25-lámpás játékon ez a minta nem gyújtja ki a_{24}-et, de kigyújtja a_{25}-öt. [2] (Az ábrán aláhúzással jelöltük a kigyújtott lámpákat.)

$\underline{0}$	1	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1
0	0	0		

4. ábra

Készítsük el ezután a következő táblázatot. a_{25} helyére írjunk 1-est, a_{24} helyére pedig 2-est. A többi a_i helyére írjunk 0-t, ha a 23-lámpás játékban az egyedül a_i-t kigyújtó lenyomásminta a 25-lámpás játékban a_{24} és a_{25} egyikét sem gyújtja ki; 1-et, ha csak a_{25}-öt gyújtja ki; 2-t, ha csak a_{24}-et, és 3-at, ha mindkettőt kigyújtja. Az így kapott táblázat az 5. ábrán látható, és valamiképpen a 23-lámpás játék hatását írja le az elhagyott két lámpán.

1	2	3	2	1
3	0	3	0	3
2	2	0	2	2
3	0	3	0	3
1	2	3	2	1

5. ábra

Most vizsgáljuk meg, hogy a 25-lámpás játékban egy gomb lenyomása hogyan változtatja meg a 0, 1, 2, ill. 3-mal jelölt mezők közül azoknak a paritását, amelyek éppen világítanak. A táblázat szimmetriái miatt elég az 1, 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 13 számú gombokat vizsgálni. A 3. és 11. gomb egyik szám paritását sem változtatja meg, ezt jelöljük így: (0, 0, 0, 0). Az 1. gomb nem változtatja meg a 0-k paritását, de a többiekét igen, ezt jelöljük így: (0, 1, 1, 1). A 2. és 6. gombok hatása: (1, 1, 1, 1), a többieké pedig: (1, 0, 0, 0). Vegyük észre, hogy valamennyi gomb hatása (a, b, b, b) alakú!

Ez azt jelenti, hogy az üres mintából kiindulva csak azok a világításminták lehetnek kigyújthatók, amelyekben a táblázatban 1-es, 2-es, ill. 3-as helyeken levő égő lámpák száma azonos paritású, hiszen az üres mintában is ez a

[1] Bonyolultabb, lineáris algebrai eszközökkel közvetlenül, általánosan is igazolható, hogy a kigyújtható minták száma pontosan az összes minták száma, osztva a 0-lenyomásminták számával.

[2] Természetesen a 23-lámpás feladat megoldását célszerű számítógéppel számolni.

helyzet. Az ilyen minták viszont ki is gyújthatók, hisz „23-lámpás részüket” a 23-as játékban egyesével kigyújtva, az 5 táblázat kódjainak jelentése szerint a_{24} és a_{25} állapota éppen megfelelő. Ez valóban az összes minták negyedrésze, mivel ha az első 23 lámpára tetszőlegesen megadjuk, hogy égjen-e vagy sem, azzal a világító 3-asok paritását már meghatároztuk. Ezután a 24. és 25. lámpát összesen négyféleképpen állíthatjuk még be, de ebből egyetlenegy beállítás lesz olyan, amikor a világító 1-esek és a 2-esek paritása megegyezik a 3-asok (már adott) paritásával. *Az 5. ábra táblázata tehát mintegy „kulcsként” használható annak gyors eldöntésére, hogy egy világításminta létrehozható-e vagy sem.* A kitűzött feladat a) részére így tagadó a válasz, hiszen az egyetlen világító lámpa a_{21}, így a világító 1-esek paritása 1, a többieké pedig 0. Az is látszik, hogy az önmagukban kigyújtható lámpák a 0-jelűek, a_7, a_9, a_{13}, a_{17} és a_{19}.

Amikor az ember valódi játékot tervez a lámpácskák ötletéből, igyekszik minél többféle játéklehetőséggel felruházni a készítendő fizikai eszközt. Az egyik bővítési lehetőség az, ha a játékosnak különböző, „ véletlen” kezdőalakzatokból kiindulva kell – minél kevesebb lépésben – meggyújtania valamennyi lámpát. Természetesen valamennyi kezdőalakzatról biztosítani kell a megoldhatóságot. Az 5. ábra táblázata lehetőséget ad ilyen alakzatok gyors generálására.

A feladatot mégsem így oldottuk meg, mert ahhoz, hogy annak idején a játék olcsón gyártható legyen, minél kisebb mikroprocesszort kellett alkalmazni; végül az összes funkció belefért egy $1K$-s négybites chip-be. A „véletlen” kezdőállásokat úgy hoztuk létre, hogy kiválasztottunk egy adott kezdőállást és 16 lépést: amikor a játékos a véletlen kezdőállást kéri, a gép ezt a 16 lépést hajtja végre (ötösével ciklikusan). A játékba így csak 32 „véletlen” kezdőállás van beépítve – ez gyakorlati szempontból elég, és a program is belefért az $1K$-ba. Az adott kezdőállást és a 16 lépést viszont sikerült úgy megválasztanunk, hogy egyik „véletlen” kezdőállást sem lehet 6-nál kevesebb lépésben megoldani.

Egy játék értékét az is növeli, ha többféleképpen is játszhatunk vele. Például módosítjuk a szomszédságokat: egy gomb lenyomása nem a tényleges szomszédok állapotát változtatja meg. A következő tétel garantálja, hogy a játéknak igen általános feltételek mellett is van megoldása, azaz valamennyi lámpa kigyújtható. A valódi játékba mi egy olyan lehetőséget is bevettünk, hogy az egyes gombok lenyomása után azok a lámpák váltsanak állapotot, ahova az adott gombon álló sakkhuszár el tudna ugrani. Ennek a változatnak az elemzését az olvasóra hagyjuk és visszatérünk az általános játék vizsgálatára.

*

Játsszuk a játékot az $a_1, \ldots, a_n$ gombok A_n halmazán, és tegyük fel, hogy minden a_i gombhoz hozzá van rendelve egy U_i halmaz úgy, hogy az a_i gombot lenyomva az U_i halmaz elemei váltanak állapotot. Az U_i halmazokról a következőket tesszük fel:

a) Minden i-re $a_i \in U_i$.

b) Minden i, j párra, ha $a_i \in U_j$, akkor $a_j \in U_i$.

Ez a két feltétel az eredeti játékra – és a lóugrásos változatra is – nyilván teljesül. Most bebizonyítjuk a következő tételt:

Tétel. A fenti játéknak mindig van megoldása, azaz létezik A_n-nek olyan H részhalmaza, hogy H elemeit megnyomva minden a_i lámpa állapotot vált.

Bizonyítás. A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük. $n = 1$-re a tétel nyilvánvalóan igaz. Tegyük fel, hogy a tétel igaz $n-1$ lámpa esetére, és tekintsük az n lámpás játékot az A_n gombokon.

Ha n páros, akkor minden a_i lámpa esetére vizsgáljuk meg azt az $n-1$ lámpás játékot, amelyet az $A_n - \{a_i\}$ gombokkal játszunk úgy, hogy minden U halmazból elhagyjuk a_i-t, az U halmazok közül pedig U_i-t. Erre a játékra is nyilván teljesülnek az a) és b) feltételek, így az indukciós feltevés szerint ennek a játéknak van megoldása. Ha a megoldó lenyomásmintát végrehajtjuk A_n-en, és az ott kigyújtja az a_i lámpát is, akkor készen vagyunk. Ha egyetlen a_i-re sem gyújtja ki a_i-t, akkor egymás után hajtsuk végre az összes $(n-1)$-lámpás játék megoldásaként kapott lenyomásmintát az A_n halmazon. Ennek során minden lámpa $(n-1)$-szer, azaz páratlan sokszor vált állapotot, tehát a kapott n darab lenyomásminta összege megoldása az n-lámpás játéknak.

Ha n páratlan, akkor először is belátjuk, hogy létezik olyan U_i halmaz, amelynek az elemszáma páratlan. Ez következik abból, hogy a $\sum_{i=1}^{n} |U_i|$ összeg páratlan, ami azért igaz, mert ebben az összegben az a) feltétel miatt minden a_i lámpát egyszer magában U_i-ben számolunk (ez tehát egy páratlan összeg), a továbbiakban pedig ha egy a_i lámpát számolunk egy U_j-ben, akkor a b) feltétel szerint az a_i lámpát is számoljuk U_i-ben, tehát a további leszámolások párba állíthatók.

Vegyünk most egy olyan a_i gombot, amihez páratlan elemszámú U_i tartozik. Most csak ennek az U_i halmaznak az elemeire végezzük el azt a gondolatmenetet, amit páros esetben az A_n minden elemére elvégeztünk. Ha egyetlen $(n-1)$-lámpás megoldás sem gyújtja ki az elhagyott lámpát, akkor a kapott $|U_i|$ számú lenyomásmintát egymás után végrehajtva az A_n halmaz minden U_i-n kívüli eleme páratlan sokszor vált állapotot, az U_i halmaz elemei pedig eggyel kevesebbszer, azaz páros sokszor. Ha ezután még az a_i gombot is lenyomjuk, akkor U_i elemei még egyszer állapotot váltanak, így ebben az esetben is megoldáshoz jutottunk. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ha az a) vagy a b) feltételt elhagyjuk, akkor már mutatható ellenpélda, azaz olyan játék, amelynek nincs megoldása. A b) feltételt elhagyva nagyon egyszerű ellenpélda a következő: három gombunk van, a, b és c. Az a lámpa kigyújtja önmagát és b-t; a b lámpa kigyújtja önmagát és c-t; a c lámpa pedig önmagát és a-t. Könnyen látható, hogy ennek a játéknak nincs megoldása.

Az a) feltétel elhagyása esetén ellenpélda az eredeti ötször ötös játék azzal a módosítással, hogy a lenyomott gomb csak a szomszédait gyújtja ki, önmagát nem. Közvetlenül is aránylag könnyen bebizonyítható, hogy ez a játék nem oldható meg, de például az alábbi 3. feladatból is következik: a mostani játék egy megoldása az eredeti játékban egy komplementer–kigyújtó lenne.

*

A továbbiakban még néhány érdekes feladatot sorolunk fel a lámpácskás játékkal kapcsolatban, majd egy-két eddig megoldatlan problémát is megemlítünk.

1. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti, 5×5-ös játékban minden létrehozható világításminta legfeljebb 15 lenyomással is előállítható.

2. Bizonyítsuk be, hogy az eredeti játék n-szer n-es négyzetre általánosított változatában mindig létezik pontosan 2^n olyan lenyomásminta, ami megegyezik az általa létrehozott világításmintával.

3. Bizonyítsuk be, hogy az n-szer n-es játékban páros n esetén pontosan 2^n olyan lenyomásminta van, amely saját komplementerét gyújtja ki; páratlan n esetén pedig nem létezik ilyen komplementer-kigyújtó.

4. Bizonyítsuk be, hogy az n-szer n-es játékok között létezik végtelen sok olyan, amiben minden világításminta létrehozható, és végtelen sok olyan is van, amelyikben nem.

Ez utolsó feladattal kapcsolatos első megoldatlan problémánk is: hogyan lehetne jellemezni azokat az n-eket, amelyekre az n-szer n-es játékban minden világításminta létrehozható. Számítógéppel 100-ig meghatároztuk az ilyen n-eket, ezek a következők:

1	2	3	6	7	8	10	12	13	15	18	20	21	22	25	26	27	28	31	36	37
38	40	42	43	45	46	48	51	52	55	56	57	58	60	63	66	68	70	72	73	75
76	78	80	81	82	85	86	87	88	90	91	93	96	97	100						

Látható, hogy ez a sorozat meglehetősen szeszélyesen viselkedik. Mi lehet benne a szabályszerűség?

Ugyancsak nem sikerült eddig általánosítani az 1. feladat eredményét n-szer n-es játékra. (Amikor minden világításminta létrehozható, akkor természetesen n^2 a megoldás: az a világításminta, amit az összes gomb lenyomásával kapunk, ilyenkor nem hozható ki kevesebb lépésből.)