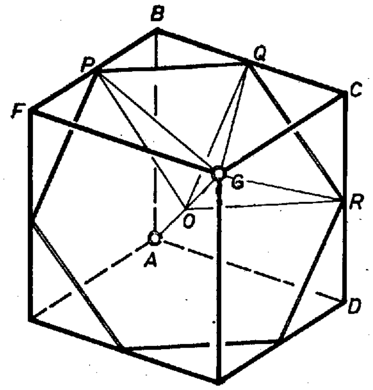
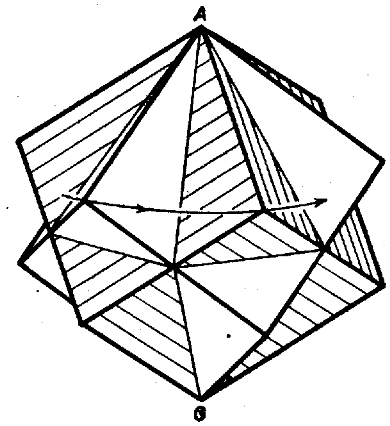
a) Megmutatjuk, hogy a két kockáról az a 6–6 él, amelyek nem futnak be a közös tengely végpontjaiba, páronként felezi egymást. Ennek alapján könnyen felbonthatjuk az együttesen kitöltött teret is és az alakzat felszínét is egyszerűen számítható térfogatú, illetve felszínű részekre.

Legyen egy kocka alaplapja $ABCD$, egyik oldallapja $BCGF$, a BF él felezőpontja P, a BC, CD élé Q, illetve R.





Ezek mindegyike egyenlő távolságra van A-tól is, G-től is, mert a távolság egy-egy olyan derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói 1 és 1/2. Ugyanez áll a további 3, sem A-ba, sem G-be nem befutó él felezőpontjára; az átfogók hossza $r=\sqrt{5}/2$. Így a 6 felezőpont rajta van az A és G körüli r sugarú gömbök felületén és metszésvonalán, ami egyszersmind az $AG=\sqrt{3}$ testátló felező merőleges síkjában is benne van, tehát kör. Ennek O középpontja felezi AG-t, sugara pl. az AQO derékszögű háromszögből $\sqrt{2}/2$. Ugyanekkora 2–2 egymás utáni felezőpont távolsága, pl. a $BCGF$ lapban QR. Ezek szerint a 6 felezőpont egy körbeírt, egyenlő oldalú idomnak, szabályos hatszögnek csúcsait alkotja, $POQ\sphericalangle=QOR\sphericalangle=60^\circ$.

Ha most a második kockát az eddigiből AG körüli 60°-os elfordítással származtatjuk, akkor P átjut Q-ba, Q pedig R-be, tehát BF új helyzete felezi BC-t, BC új helyzete CD-t stb., amint állítottuk.

Messük le az eredeti kockából az APQ, a GQR, … síkkal a B, a C csúcs körüli, 1/2, 1/2, 1 élű derékszögű tetraédert, és A-t, G-t kivéve a kocka további 4 csúcsának is az ilyen „környezetét”. A visszamaradó test szabályos hatoldalú kettős gúla (bipiramis), ez a kocka elfordítása után az új helyzetben is benne van, a két kocka belsejének közös része. A lemetszett – de továbbra is odatapasztott – 6 tetraéder viszont az eredeti kockán kívülre jut, pl. az $APQB$ tetraéder az $AQRB'$-be, és B'-t az $ABCD$ lap – illetve ennek AQR részháromszöge – elválasztja a kockától.

b) Eszerint a keresett térfogat a kettős gúla és 12 kis tetraéder térfogatának összege, másképpen az eredeti kocka és 6 kis tetraéder térfogatának összege:

$$V=1^3+6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{5}{4}\text{ térfogategység.}$$

A felszín pedig a kis tetraéder 3 derékszögű lapterület összegének 12 szerese:

$$F=12\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)=\frac{15}{2}\text{ területegység.}$$

Megjegyzés. Érdekes, megegyezés, hogy alakzatunk térfogata is, felszíne is 1/4 résszel nagyobb, mint az eredeti kockáé.

Mátrai Gizella (Pécs, Széchenyi I. Gimn., III. o. t.)