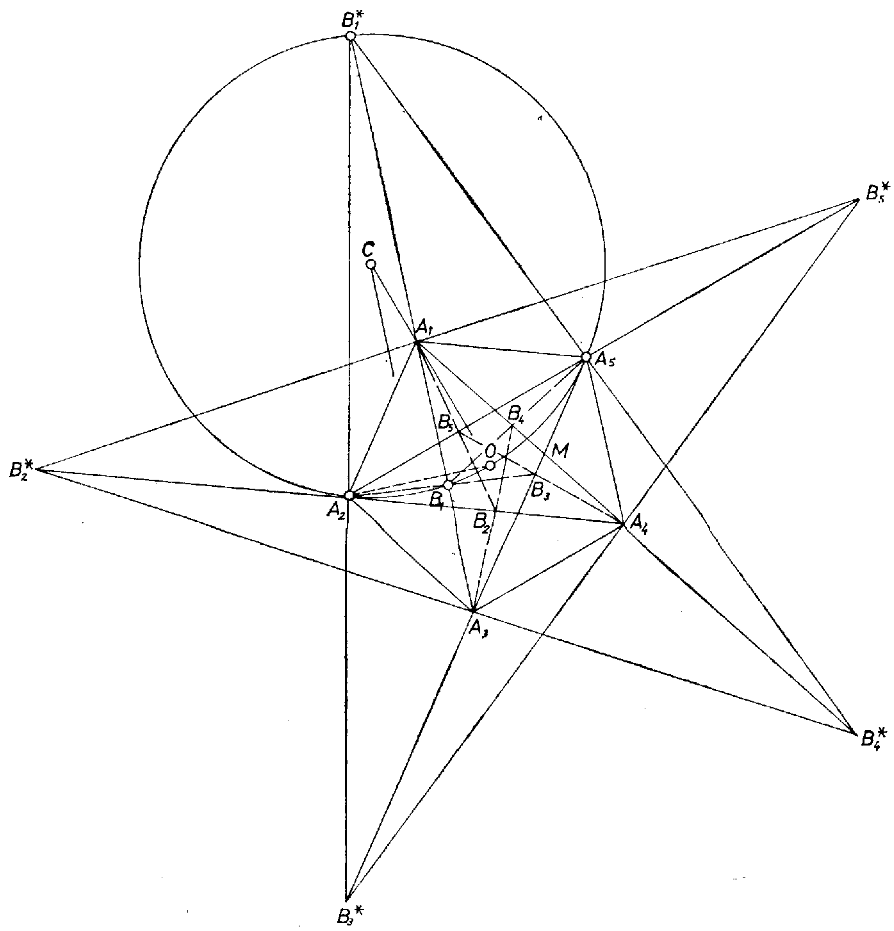
$$\frac{A_1B_1}{B_1A_3} \quad \text{és} \quad \frac{A_3B_3}{B_3A_5} \tag{1}$$

I. megoldás. 1. Szerkesztés útján határozzuk meg az A_1A_3 átlószakasz kívánt tulajdonságú B_1 pontját (1. ábra).



1. ábra

Erre A_1B_1 és B_1A_3 egyirányú szakaszok, arányuk pozitív, ezért egyirányúak az A_3B_3 és B_3A_5 szakaszok is, tehát B_3 az A_3A_5 átlószakasz belső pontja. (Ha ugyanis B_3 az A_3A_5-nek akármelyik meghosszabbításán keletkezné, akkor belőle csak megfordulással juthatnánk A_5-be, és így az (1)-beli második hányados negatív lenne, a követelménnyel ellentétben.)

Másrészt $A_1A_3 = A_3A_5$ alapján $A_1B_1 = A_3B_3$, továbbá $B_1A_3 = B_3A_5$. Ugyanis B_1-gyel A_1-től A_3 felé haladva, az arány szigorúan monoton nő, azaz minden pozitív értéket csak egyszer vesz fel. Valóban ha X, Y az A_1A_3 szakasz pontjai úgy, hogy $A_1Y > A_1X$ – tehát egyszersmind $YA_3 < XA_3$ –, akkor

$$\frac{A_1Y}{YA_3} = \frac{A_1X + XY}{YA_3} > \frac{A_1X}{YA_3} > \frac{A_1X}{XA_3}.$$

Mivel az ötszög szabályos, azért az O középpontja körüli $(2/5)\cdot 360^\circ = 144^\circ$-os elfordítással A_1 az A_3-ba jut, egyidejűen A_3 az A_5-be, és az előbbiek alapján B_1 a B_3-ba. Eszerint OB_1B_3 egyenlő szárú háromszög, és a B_1B_3 alapon levő szögei 18°-osak. Az A_2 csúcs az alap B_1-en túli meghosszabbításán van, hiszen az A_1A_3 egyenes elválasztja A_2-t az A_3A_5 szakasztól; így $OB_1A_2\sphericalangle = 180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$.

Belátjuk még, hogy nem lehet B_1 az OA_2 egyenesnek azon az oldalán, amelyiken A_1 van, más szóval, hogy $A_1B_1 : B_1A_3 > 1$ (hiszen OA_2 az A_1A_3 átlószakasz felező merőlegese). Ugyanis az OA_2 egyenes átmegy az $A_1A_3A_4A_5$ szimmetrikus trapéz átlóinak M metszéspontján, és az $A_1B_1 : B_1A_3 < 1$, azaz $A_1B_1 < B_1A_3$ nagyságviszony mellett B_3 az MA_5 szakaszon keletkezné́k, akkor pedig $A_3B_3 > A_3M > MA_5 > B_3A_5$ lenne, és $A_3B_3 : B_3A_5 = A_1B_1 : B_1A_3 > 1$. (Az $A_3M > MA_5$ nagyságviszony az $A_1A_3 > A_4A_5$-ből következik.)

Eszerint B_1 az OA_2 szakasznak azon a 162°-os (vagyis tompaszögű) látókörívén van rajta, melynek C középpontja az OA_2 egyenesnek A_1-et tartalmazó oldalán van, és $OCA_2\sphericalangle = 360^\circ - 2\cdot 162^\circ = 36^\circ$. Könnyen látható, hogy ekkor $A_2OC\sphericalangle = 72^\circ$, tehát C-t az OA_2 szakasz felező merőlegeséből az OA_1 egyenes metszi ki.

2. Hasonlóan kapunk megfelelő B_1^* pontot A_1A_3-nak A_1-en túli meghosszabbításán. Ennek a meghosszabbításnak bármely pontját A_2-vel összekötve, az egyenes az A_3A_5 egyenest az A_3-on túli meghosszabbításon metszi (hiszen egyenesünk nem lépheti át az A_2-n át A_3A_5-tel párhuzamosan húzott egyenest, ami az A_2A_1). Így az (1)-beli hányadosok mindegyike negatív és B_1^*-ra, valamint a hozzá tartozó B_3^*-ra $A_1B_1^* = A_3B_3^*$; ezt a fentiekhez hasonlóan láthatjuk be.

Ezek szerint B_1^* és B_3^* is egymásba mennek át a fenti 144°-os elfordítással. De mivel itt OA_2 elválasztja B_1^*-ot és B_3^*-ot, azért $A_2B_1^*O\sphericalangle = 18°$, tehát B_1^* a fenti látókörív kiegészítő ívén van, egy csapásra kimetszhető A_1A_3-ból mint a C körüli CO sugarú kör másik metszéspontja.

3. A_1A_3-nak A_3-on túli meghosszabbításán nem található megfelelő B_1. Erre ugyanis abszolút értékben $A_1B_1 > A_3B_1$ lenne, másrészt B_3 az A_3A_5-nek A_3-on túli meghosszabbításán keletkezne, így $A_3B_3 < A_5B_3$, tehát az (1)-beli arányok nem lehetnek egyenlők (csak előjelük egyező, mindkettő negatív). Ezzel a megoldást befejeztük.

Sok kiegészítéssel *Dozmati Zoltán* (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.) ötlete alapján.

Megjegyzés. Hasonlóan értelmezve A_4B_3 és A_2A_5 metszéspontjaként B_5-öt, és így tovább a B_2, B_4 pontot, azt mondhatjuk, hogy a $B_1B_3B_5B_2B_4$ hurkolt ötszög bele van írva az $A_1A_3A_5A_2A_4$ szabályos csillagötszögbe, és megfordítva, az $A_2A_4A_1A_3A_5$ szabályos csillagötszög bele van írva a $B_1B_3B_5B_2B_4$ hurkolt ötszögbe, vagyis e két hurkolt ötszög egymásba van beleírva. Ez a megállapítás a B_1^*-ból adódó alakzatra is érvényes. – Egyébként könnyű belátni, hogy $B_1B_3B_5B_2B_4$ is szabályos csillagötszög.

II. megoldás. Számítással határozzuk meg B_1 helyzetét abból, hogy a B_1-et meghatározó A_2B_3 és A_1A_3 egyeneseket két párhuzamos egyenes metszi át: A_1A_2 és A_3A_5. Válasszuk pozitívnak az A_1-ből A_3-ba és az A_3 ból A_5-be mutató irányt, és legyen irány és nagyság szerint $A_1B_1 = A_3B_3 = x$, továbbá $A_1A_3 = A_3A_5 = d$ az ötszög átlója, végül $A_2A_1 = a$ az oldala. A párhuzamos szelők tétele alapján

$$B_1A_1 : A_1A_2 = B_1A_3 : A_3B_3$$

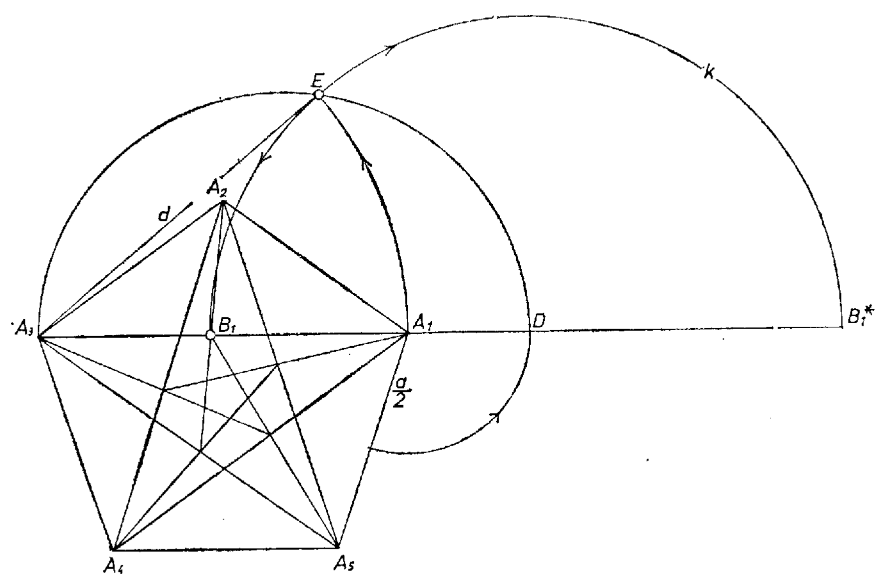
(nagyság és irány szerint, felhasználva az összetartozó B_1 és B_3 lehetséges helyzeteiről az I. megoldásban látottakat), illetve rövid jelöléseinkkel

$$-x : -a = (d-x) : x,$$
$$x^2 + ax - ad = 0.$$

Rendezzük át ezt az egyenletet úgy, hogy a szerkesztés menete kiolvasható legyen belőle:

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 = \left(d+\frac{a}{2}\right)^2 - d^2;$$

Mérjük fel tehát az A_3A_1 egyenes A_1-en túli meghosszabbítására A_1-ből kiindulva az $\frac{a}{2}$ szakaszt, a végpontja legyen D (2. ábra).



2. ábra

Rajzoljunk Thalész-kört A_3D fölé, és messük el az A_3 körüli, A_1-en átmenő körrel: ez az E pont. Ekkor a DE szakasz hossza egyenlő $x+\frac{a}{2}$ abszolút értékével. A D körüli, E-n átmenő k körnek az A_1A_3 szakaszon levő B_1 metszéspontjára $x_1 = A_1B_1 = DE - a/2$, ez tehát az egyenlet gyöke. Legyen k-nak az A_1A_3 egyenessel alkotott második metszéspontja B_1^*, akkor $x_2 = -A_1B_1^* = -DE - a/2$ az egyenlet másik gyöke. Tehát B_1, B_1^* a keresett pontok.